



امتحانات نهایی

ریاضی ۳

به تفکیک فصل

سوالات نهایی ۹۸ تا ۴۰۴

کانال راه موفقیت دانش آموزان

تهیه و تنظیم:

چاپ، تکثیر و استفاده از محتوای آزمون‌های راه موفقیت برای تمام دانش آموزان ایران زمین رایگان و مجاز است.



[Shad.ir/rmstudent](https://shad.ir/rmstudent)

ویژه امتحانات نهایی خرداد ۱۴۰۵



سوال ۱۳۳

فصل ۱: تابع

۱ درست یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- نمودار تابع $y = 3f(x)$ با انبساط نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها به دست می‌آید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ درست

۲ اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ باشد، آنگاه:

(الف) دامنهٔ تابع f^{-1} of را به دست آورید. (ب) مقدار $f^{-1}(5)$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$D_{f^{-1} \text{ of}} = D_f = [2, +\infty)$$

پاسخ: ۱ الف روش اول:

روش دوم:

$$D_{f^{-1} \text{ of}} = \{x \in D_f | f(x) \in D_{f^{-1}}\} = \{x \in D_f | f(x) \in \mathbb{R}_f\} = D_f = [2, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = x^2 + 2 \Rightarrow f^{-1}(5) = 27$$

(ب) روش اول:

$$f^{-1}(5) = x \Rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 5 \Rightarrow x = 27$$

روش دوم:

۳ اگر $f(x) = 3\sqrt{x} + 2$ و $f(g(x)) = 3x^2 - 4$ ، آنگاه ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

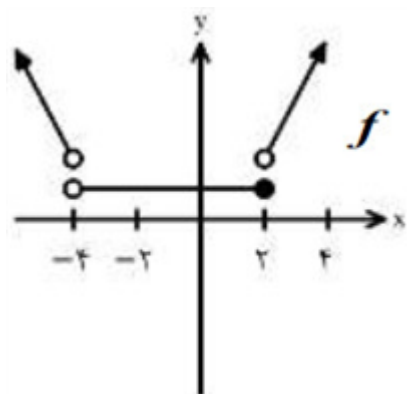
$$f(g(x)) = 3\sqrt{g(x)} + 2$$

پاسخ: ۱

$$3x^2 - 4 = 3\sqrt{g(x)} + 2 \Rightarrow \sqrt{g(x)} = x^2 - 2 \Rightarrow g(x) = (x^2 - 2)^2, |x| \geq 2$$



با توجه به نمودار تابع f ، در جدول زیر برای هر یک از قسمت‌های ستون A قسمت صحیح از ستون B را انتخاب کنید. (یکی از قسمت‌های ستون B اضافه است).



B	A
(۱) $(-\infty, -4)$	الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.
(۲) $(2, +\infty)$	ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.
(۳) $(-1, +\infty)$	پ) تابع در این بازه ثابت است.
(۴) $(-4, 2]$	

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پ) ۴

ب) ۱

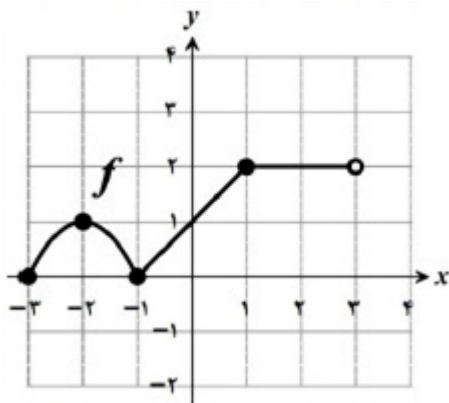
الف) ۲ پاسخ: ۱

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر تابع $g(x) = 3f\left(\frac{1}{3}x\right) + 1$ باشد، آنگاه:

۵

الف) دامنه و برد تابع g را به صورت بازه بنویسید.

ب) اگر $A = (-2, 1)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطه متناظر A روی نمودار تابع g را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

الف) $D_g = [-6, 6)$ $R_g = [1, 7]$

ب) $(-4, 4)$

پاسخ: ۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $f(x) = (1-x)^3$ ، تابعی اکیداً نزولی است.

۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ درست

اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$ باشد، حدود x را به دست آورید.

۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

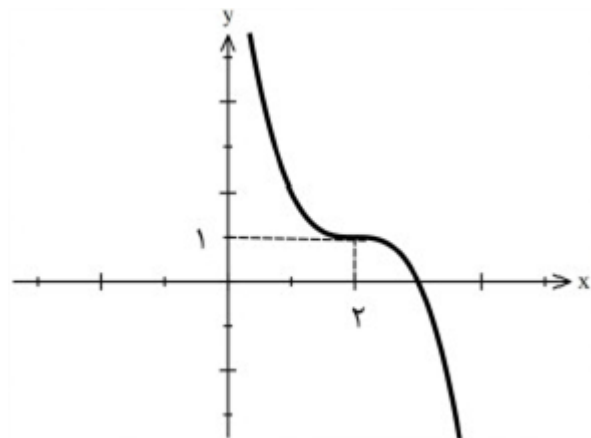
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} \Rightarrow x+1 \geq 2x-3 \Rightarrow x \leq 4$$

پاسخ: ۱

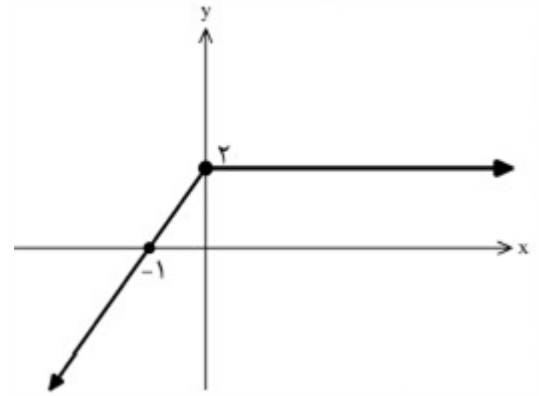
نمودار تابع $f(x) = -(x - 2)^3 + 1$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن تابع f را بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ $f(x)$ اکیداً نزولی (یا نزولی) است.



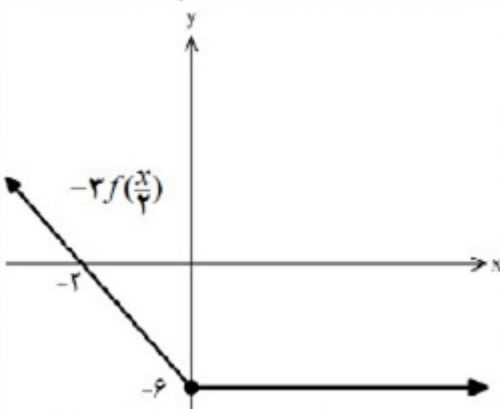
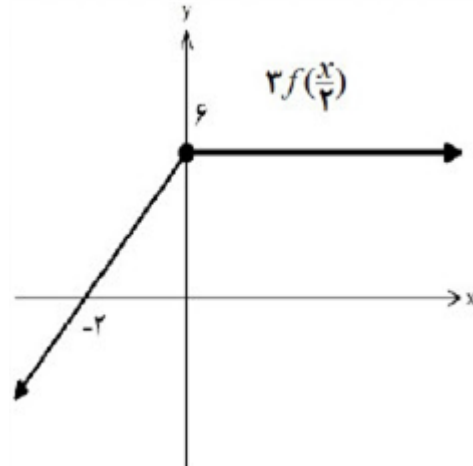
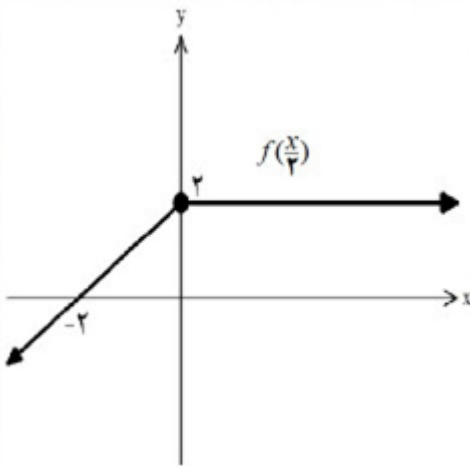
نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.



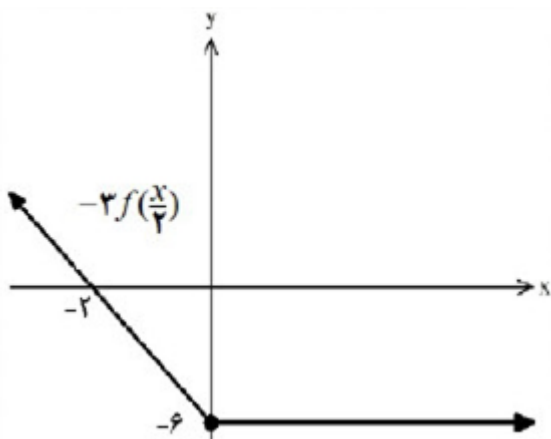
الف) نمودار تابع $g(x) = -3f\left(\frac{x}{3}\right)$ را رسم کنید.
 ب) مقدار $g(5)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ روش اول:



روش دوم: (انتقال نقاط)



$$\begin{aligned} (-1, 0) &\rightarrow (-2, 0) \\ (0, 2) &\rightarrow (0, -6) \end{aligned}$$

۱۰ تابع‌های $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه تابع $(f \circ g)(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $(g \circ f^{-1})(2)$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

الف) $D_g = [2, +\infty)$ $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

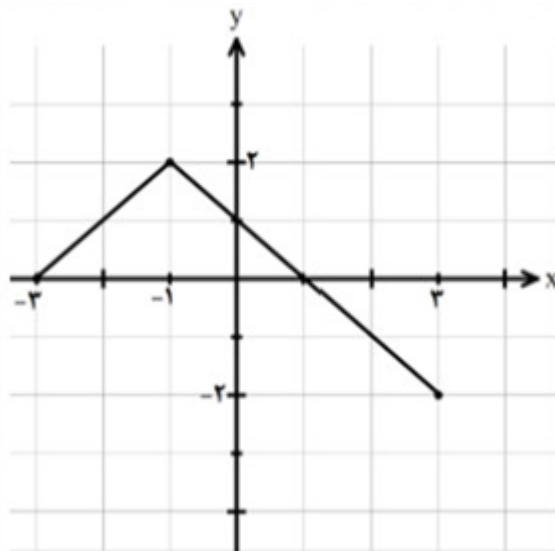
$D_{f \circ g} = \left\{ x \geq 2 \mid \sqrt{x-2} \neq 2 \right\} = \{x \geq 2 \mid x \neq 6\} = [2, +\infty) - \{6\}$

ب) $(g \circ f^{-1})(2) = g(5) = \sqrt{3}$

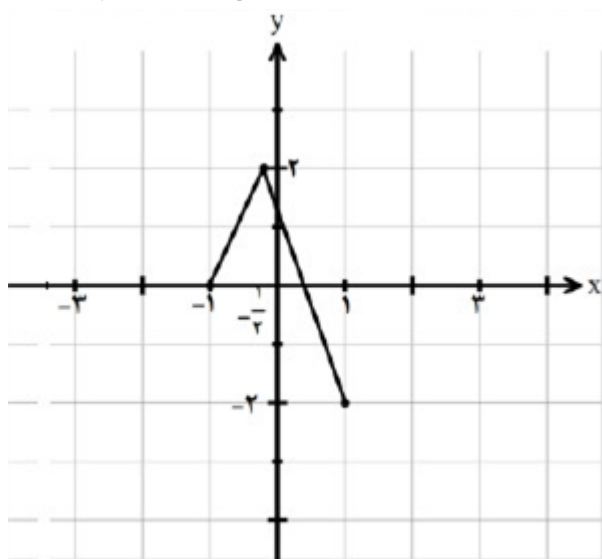
پاسخ: ۱



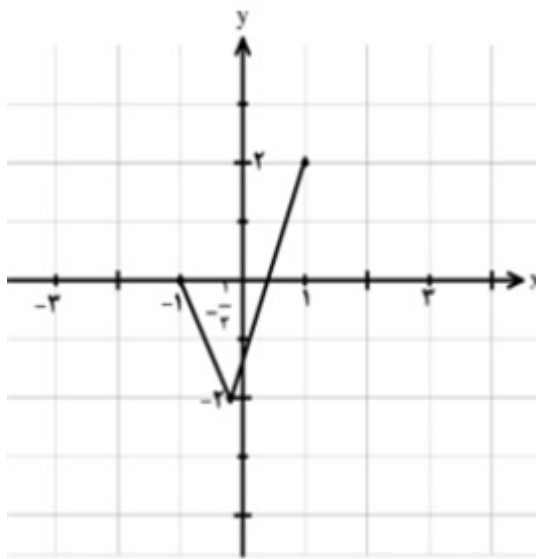
نمودار تابع f به صورت زیر است. نمودار تابع $y = -f(3x) + 1$ را رسم کنید.



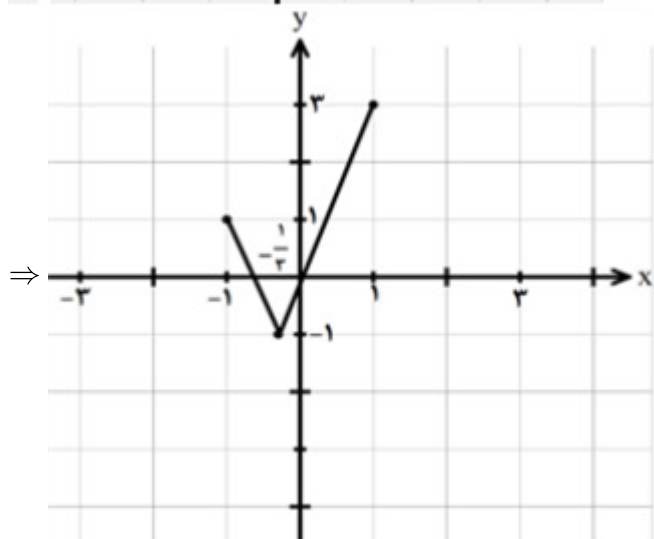
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳



$\Rightarrow$



پاسخ: ۱



$\Rightarrow$

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- اگر تابعی یک به یک باشد، آنگاه اکیداً یکنوا است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست



درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

۱۳

- دامنه تابع‌های $y = -2f(x) + 4$ و $y = \frac{1}{5}f(x)$ با یکدیگر برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست

۱۴ فرض کنید $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشند. در این صورت $(g \circ f)^{-1}(7)$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ روش اول: $(g \circ f)^{-1}(7) = (f^{-1} \circ g^{-1})(7) = f^{-1}(3) = 3$

روش دوم: $(g \circ f)(x) = 7 \Rightarrow ((1 + \sqrt{x-2})^2 - 1) = 7 \Rightarrow x = 3$

روش سوم:

$$(g \circ f)(x) = (1 + \sqrt{x-2})^2 - 1 \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2 + 2 \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(7) = 3$$

۱۵ اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشند، آنگاه $D_{f \circ g}$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq -1 \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} - \{1\}\}$$

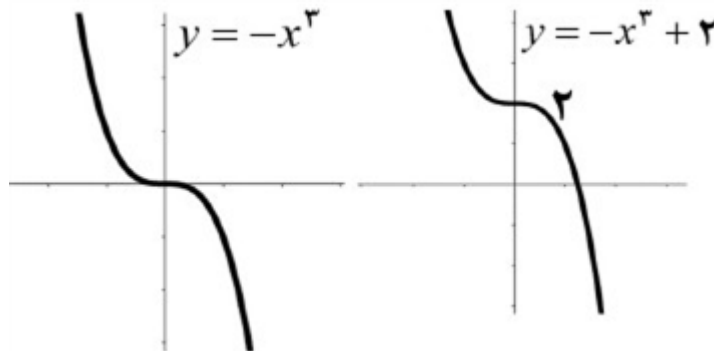
$$\sqrt{x+1} \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

$$D_{f \circ g} = [-1, 0) \cup (0, +\infty) \text{ یا } [-1, +\infty) - \{0\}$$

پاسخ: ۱

۱۶ نمودار تابع $y = -x^3 + 2$ را رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳



پاسخ: ۱ تابع اکیداً نزولی است.

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

۱۷

- تابع $y = f(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ مفروض است. برد تابع‌های $y = f(3x)$ و $y = f(5x)$ یکسان است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

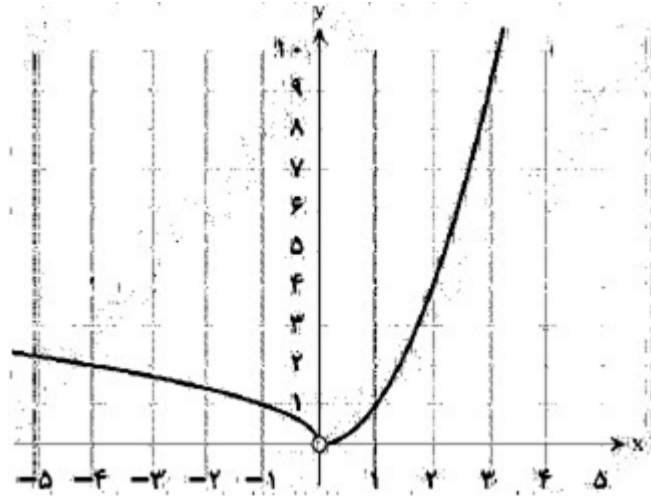
پاسخ: ۱ درست



۱۸ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کنید. بزرگ‌ترین بازه‌ای که این تابع در آن اکیداً صعودی است را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



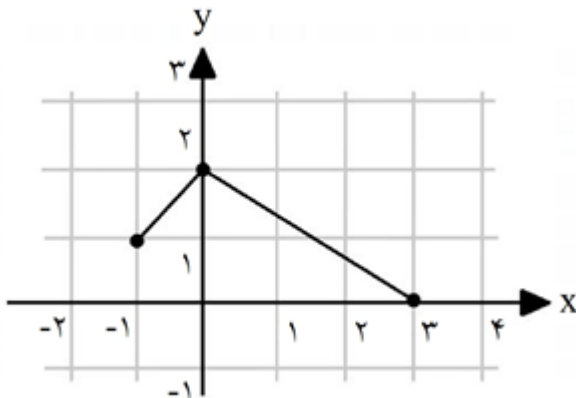
۱۹ اگر دامنه تابع g بازه $[-2, 4]$ باشد، آنگاه دامنه تابع $k(x) = 3g(-2x)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$D_k = [-2, 1]$$

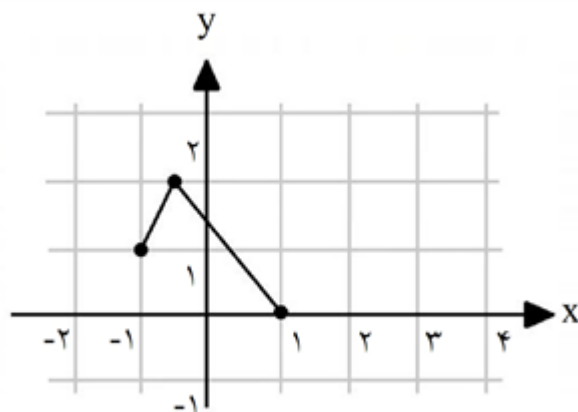
پاسخ: ۱

۲۰ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ را به کمک آن رسم کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ ابتدا نقاط مشخص شده در نمودار f را در راستای محور طول‌ها یک واحد به سمت چپ منتقل کرده، سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. یا (نقاط با استفاده از محاسبه به دست آورده شود).



۲۱

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

- اگر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در راستای محور x ها، دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم و آن را $g(x)$ بنامیم، آنگاه نمودار تابع $g^{-1}(x)$ از ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ دوم

۲۲

تابع $f(x) = \sqrt{x+4} - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

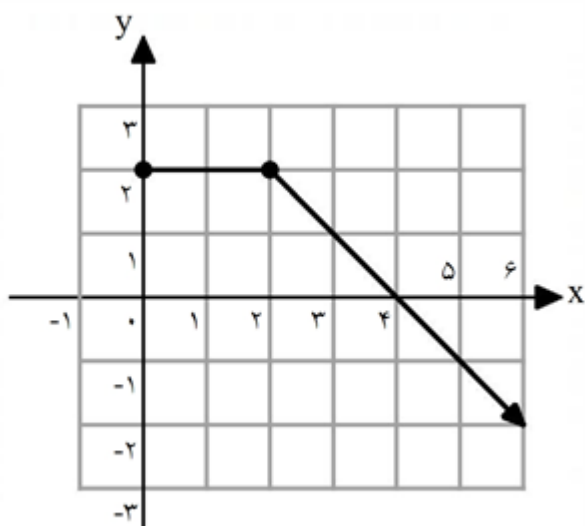
پاسخ: ۱

$$y = \sqrt{x+4} - 1 \Rightarrow y+1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow (y+1)^2 = x+4 \Rightarrow (y+1)^2 - 4 = x$$

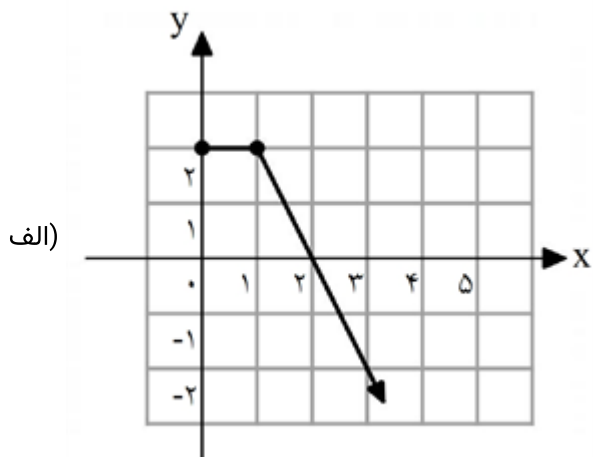
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+4)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty)$$

۲۳

در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است.الف) نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(2x)$ را رسم کنید.ب) مقدار $\text{gof}(0)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳



الف)

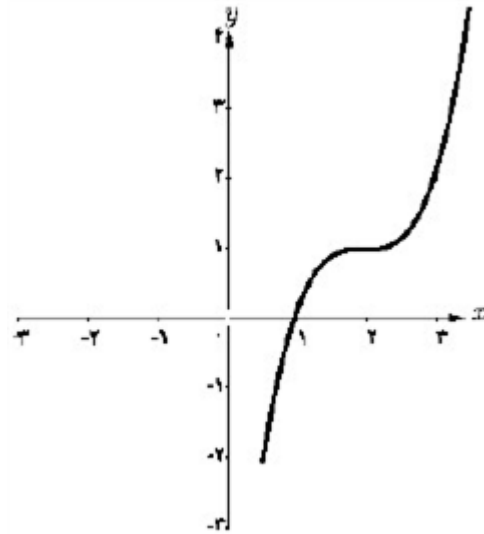
$$\text{ب) } g(f(0)) = g(2) = 0$$

پاسخ: ۱



۲۴ به کمک انتقال نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳



پاسخ: ۱

۲۵ جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.
تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ ۲

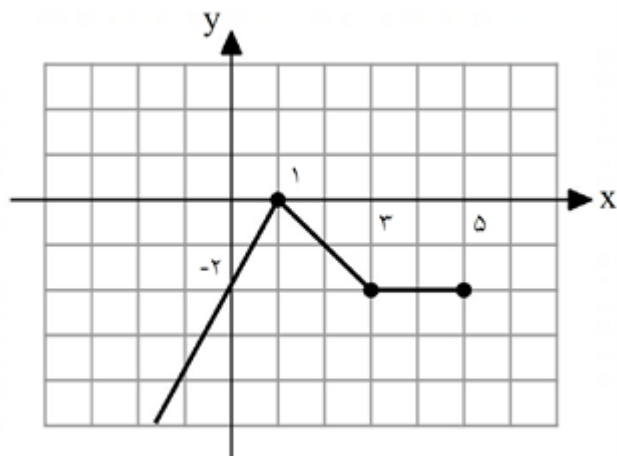
۲۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- در تابع $f(x) = 4 + \sqrt{x - 1}$ دامنه تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ برابر $(1, +\infty)$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست

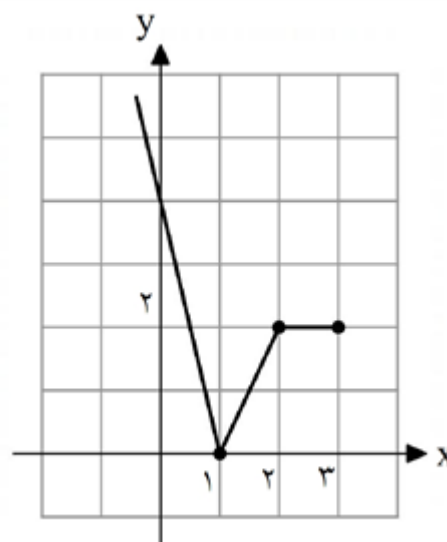


نمودار تابع $f(x)$ در مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = -f(2x - 1)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ دامنه: $(-\infty, 3]$
برد: $[0, +\infty)$



۲۸ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

تابع $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ را در نظر بگیرید. نمودار f^{-1} از ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ چهارم

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، تابع $f + g$ نیز در آن فاصله اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست

$$f(x) = -x^2 - 2; x \geq 0$$

ضابطه و دامنه تابع وارون تابع مقابل را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

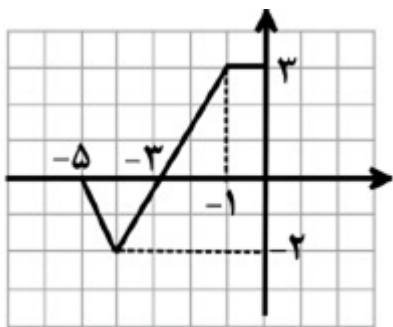
$$y = -x^2 - 2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{-y - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x - 2}$$

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, -2]$$

پاسخ: ۱

۳۱

نمودار تابع f به صورت مقابل است.
دامنه و برد تابع $g(x) = 2f(-x)$ را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$D_g = [0, 5], R_g = [-4, 6]$$

پاسخ: ۱

۳۲

جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

اگر $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ مقدار $f \circ f(1)$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $\frac{1}{3}$

۳۳

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ از انقباض افقی نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید.

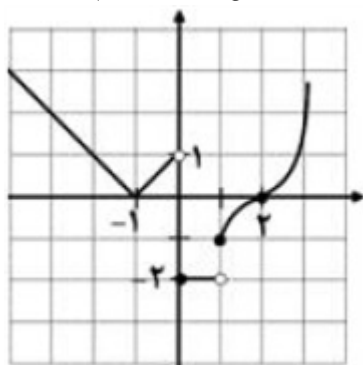
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

۳۴

ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

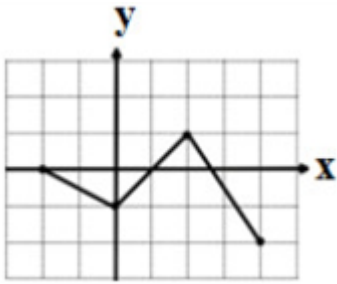


اکیدا صعودی $(1, +\infty)$ و $(-1, 0)$
اکیدا نزولی $(-\infty, -1]$

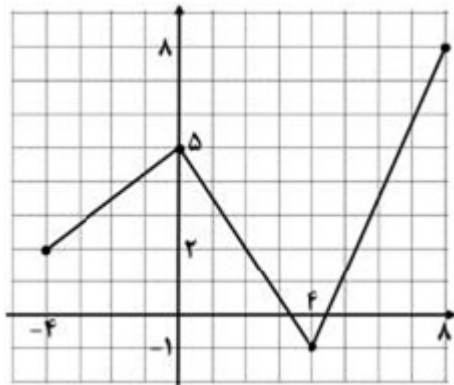
پاسخ: ۱



۳۵ نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $g(x) = -3f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ را رسم کرده و سپس برد تابع $g(x)$ را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲



$$R = [-1, 8]$$

۱ پاسخ:

۳۶ اگر دامنه تابع $f(x) = x^2 + 4x + 3$ برابر $[-2, +\infty)$ باشد، ضابطه و دامنه تابع وارون را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$f(x) = (x+2)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = (x+2)^2 \xrightarrow{x \geq -2} \sqrt{y+1} = x+2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 2$$

$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$$

۱ پاسخ:

۳۷ اگر $f(g(x)) = 4x^2 + 1$ و $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ ، آنگاه ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{2} - 1 \Rightarrow \frac{g(x)}{2} - 1 = 4x^2 + 1$$

$$g(x) = 8x^2 + 4$$

۱ پاسخ:

۳۸ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم، ضابطه تابع جدید را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$y = 2\sqrt{x-3}$$

۱ پاسخ:

۳۹ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۱ پاسخ: نادرست



۴۰

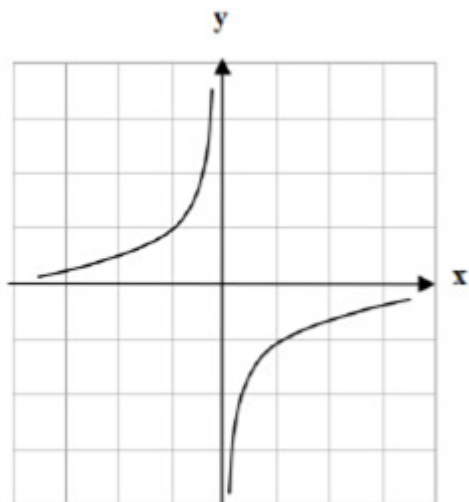
درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
 تابع $y = \sqrt{3}x^2 - \pi x + 1$ یک تابع چندجمله‌ای است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست

۴۱

با توجه به نمودار تابع مقابل، تعیین کنید:
 الف) تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً یکنوا است.
 ب) آیا تابع در کل دامنه خود اکیداً یکنوا است؟

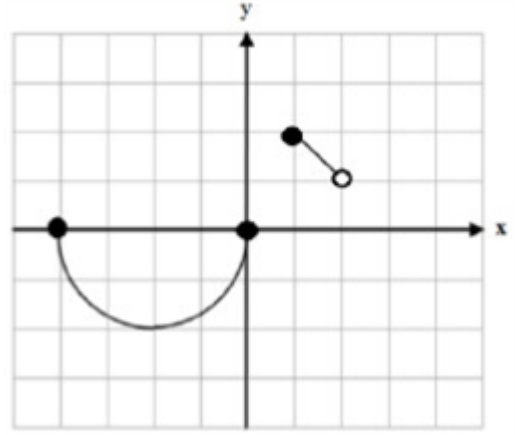


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ الف) $(0, +\infty)$ اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) و $(-\infty, 0)$ اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)
 ب) خیر، در کل دامنه اکیداً یکنوا نیست.

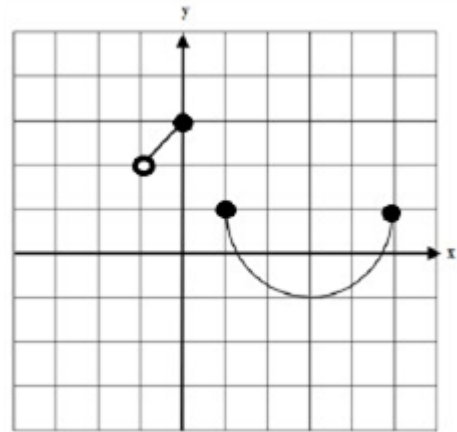


۴۲ نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.



نمودار تابع $y = f(1-x) + 1$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲



۱ پاسخ:

۴۳ جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.

اگر برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازه $[0, 2]$ باشد، برد تابع $y = 2 + \sqrt{x-2}$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۱ پاسخ: $[2, 4]$

۴۴ اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x-1$ ، آنگاه:

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.
ب) ضابطه تابع fog را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

الف) $D_{\text{fog}} = \{x \in \mathbb{R} | x - 1 \geq -1\} = [0, +\infty)$

۱ پاسخ:

ب) $f(g(x)) = \sqrt{x-1+1} = \sqrt{x}$

۴۵ در جای خالی عبارت مناسب را قرار دهید.

نقطه $(-2, 4)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ می‌باشد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y = f(2x)$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۱ پاسخ: $(-1, 4)$



۴۶

در جای خالی عبارت مناسب را قرار دهید.

اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x-1}$ باشد، مقدار $(f \circ f^{-1})(5)$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ ۵

۴۷

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست

۴۸

اگر $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{125}$ باشد، حدود x را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow 2x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 1 \quad (\text{ص } ۲۲)$$

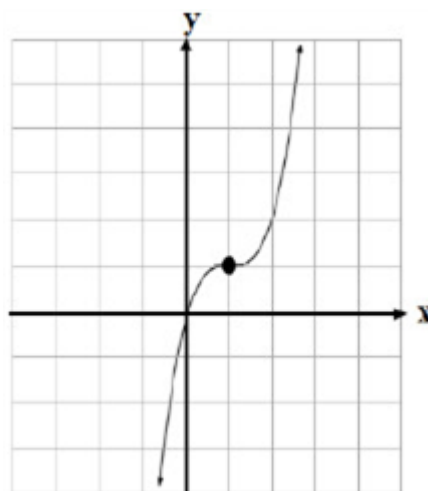
۴۹ نمودار تابع $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک انتقال نمودار $f(x) = x^3$ رسم کنید، سپس اکیداً یکنوایی تابع $g(x)$ را در تمام دامنه خود، بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1$$

اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)



۵۰ اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[-1, 3]$ و برد آن $(0, 2]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱

$$D_{f\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} \leq 3 \Rightarrow D_{f\left(\frac{x}{2}\right)} = (-2, 6]$$

برد تغییر نمی‌کند.



۵۱ اگر $f(x) = 7 - 4x^2$ و $g(x) = \sqrt{x+3}$ باشد:
 الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.
 ب) مقدار $(\text{gof})(1)$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

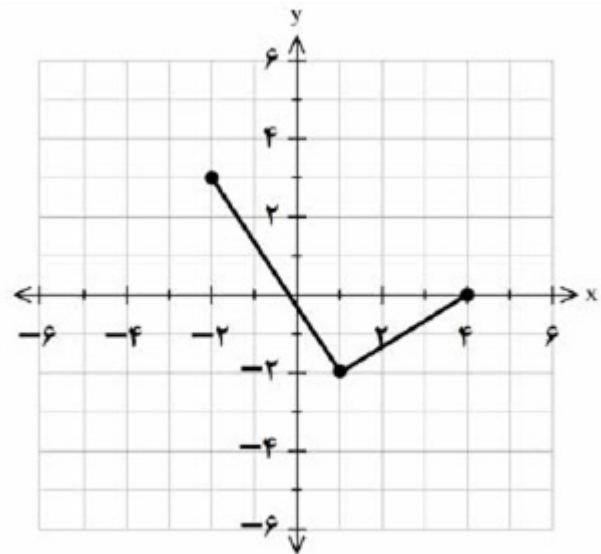
پاسخ: ۱
 الف) $D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-3, +\infty) \mid \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}\} = [-3, +\infty)$
 ب) $(\text{gof})(1) = g(3) = \sqrt{6}$

۵۲ اگر $f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4), (7, 7)\}$ ، تابع gof را در صورت وجود بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

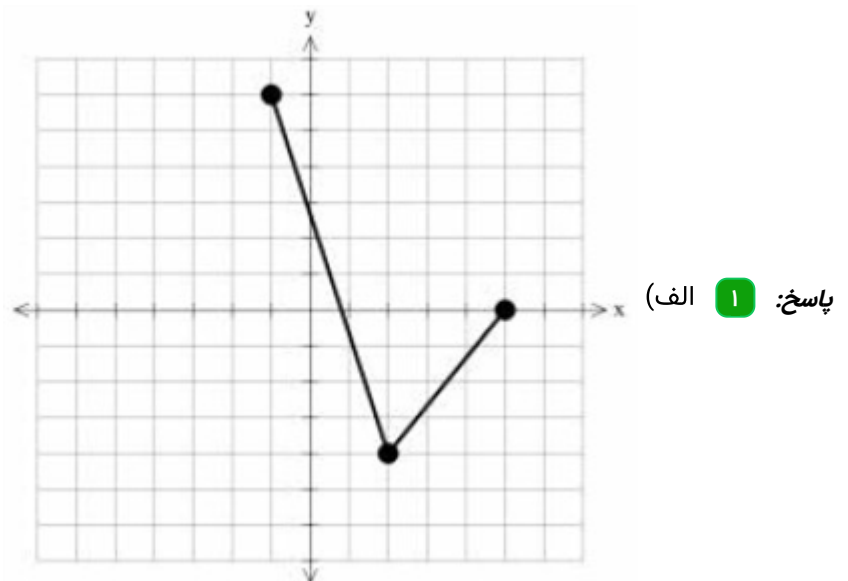
پاسخ: ۱
 $\text{gof} = \{(0, 4), (3, 7), (5, 0)\}$

۵۳ نمودار تابع f به صورت زیر است:



الف) نمودار تابع $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کنید.
 ب) دامنه تابع g را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱



ب) $[-1, 5]$



۵۴

در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.
- ضابطه تابع وارون $y = x^3$ برابر است.

پاسخ: ۱ $\sqrt{x}$

۵۵

اگر $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{27}\right)$ باشد، حدود x را به دست آورید.

پاسخ: ۱

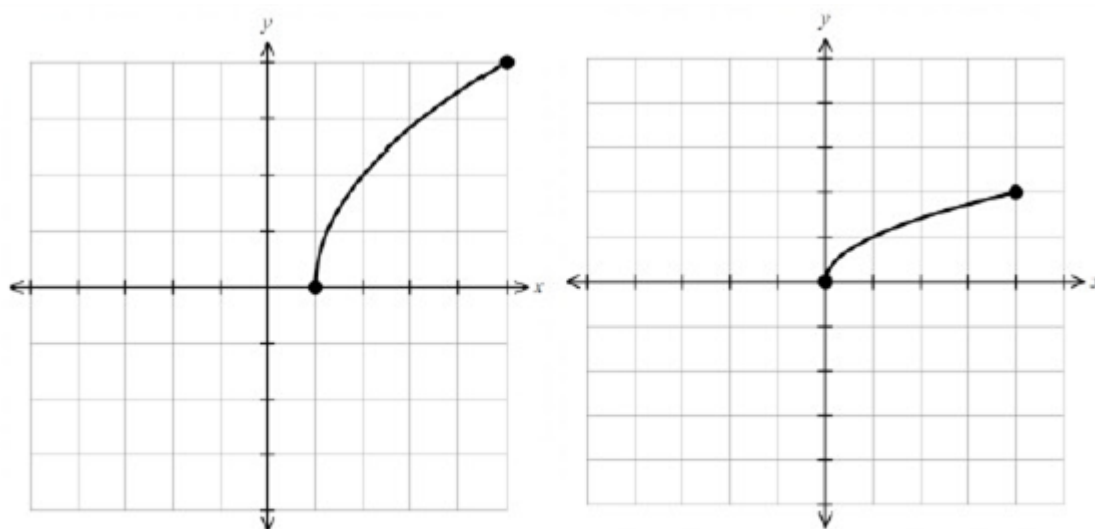
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow 2x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$$

۵۶

الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه $[0, 4]$ رسم کنید.
ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱



پاسخ: ۱

ب

الف

$$R_g = [0, 4], D_g = [1, 5]$$

۵۷

جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
- اگر تابعی در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع در آن فاصله است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ ثابت

۵۸

اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟

$$x \text{ ورودی} \Rightarrow 2x - 2 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$x = 3 \Rightarrow 2(3) - 2 = 4 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{(4)} + 1} = \frac{4}{3}$$

پاسخ: ۱



۵۹) برد تابع f بازه‌ی $[-3, 1]$ است. برد تابع $y = -2f(3x - 1) + 3$ کدام یک از موارد زیر است؟

- ۱) $(-8, 0]$ ۲) $(-12, 0]$ ۳) $[1, 9)$ ۴) $(-10, 2)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-3 < f(3x - 1) \leq 1 \xrightarrow{\times(-2)} -2 \leq -2f(3x - 1) < 2 \xrightarrow{+3} 1 \leq y < 9$$

۶۰) در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

- اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱

۶۱) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ نادرست

۶۲) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $f(x) = x^3$ ، تابعی اکیداً صعودی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ درست

۶۳) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

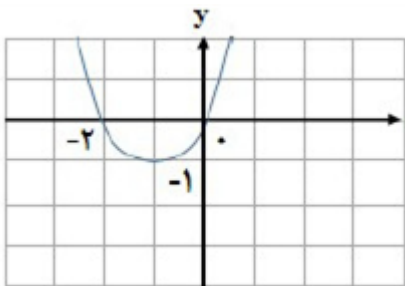
- تابع $f(x) = \sqrt{x} - x^2$ یک تابع درجه دوم است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ درست

۶۴) ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمایید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

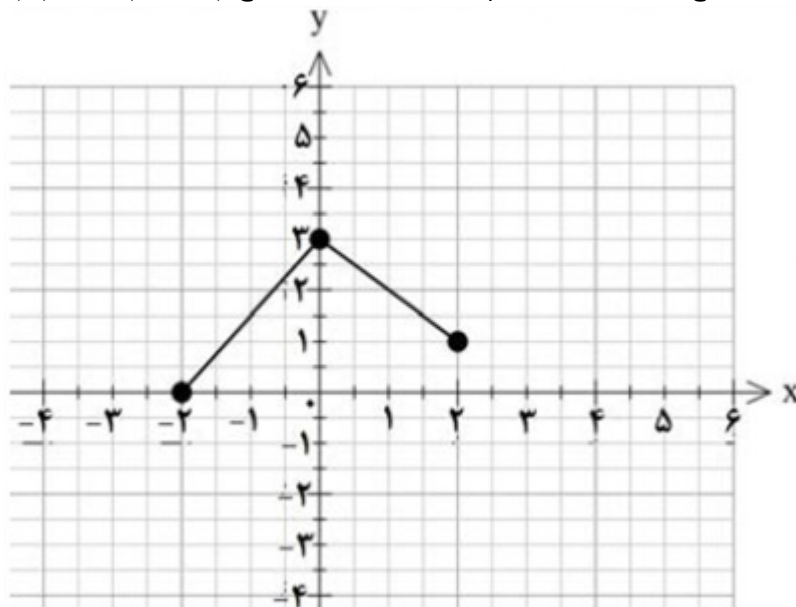


اکیدا صعودی $[-1, +\infty)$
اکیدا نزولی $(-\infty, -1]$

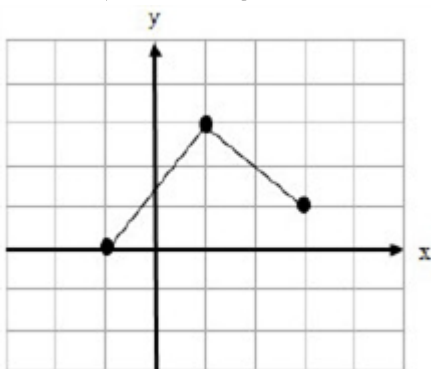
پاسخ: ۱



نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(x - 1)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

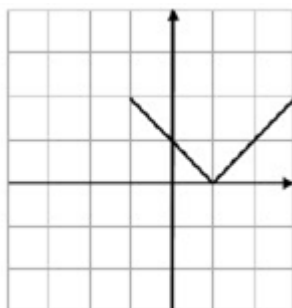


$$D_g = [-1, 3]$$

پاسخ: ۱

ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 1|$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰



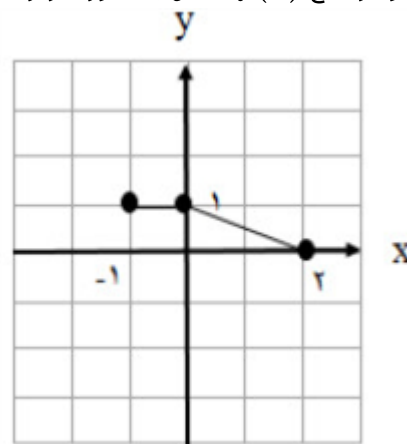
اکیدا صعودی $(1, +\infty)$

اکیدا نزولی $(-\infty, 1]$

پاسخ: ۱

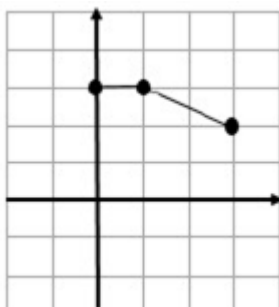


۶۷ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است.



نمودار $g(x) = f(x - 1) + 2$ را رسم کرده و دامنه تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

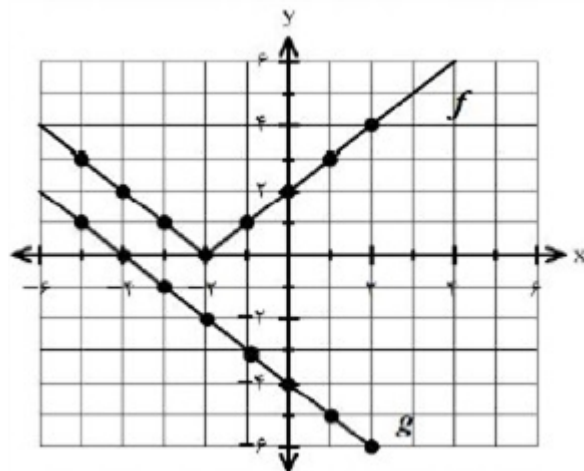
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰



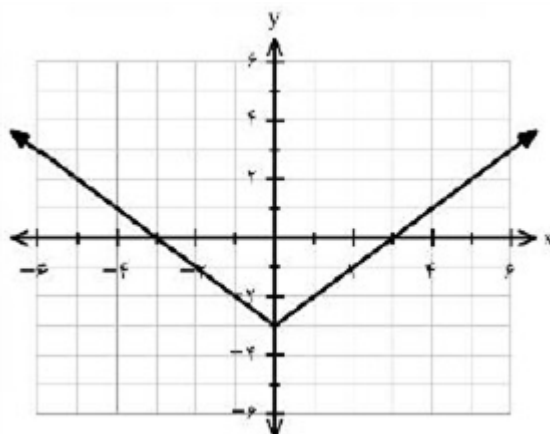
$$D_g = [0, 3]$$

۱ پاسخ:

۶۸ نمودار تابع $g(x) = f(x - 2) - 3$ را رسم کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰



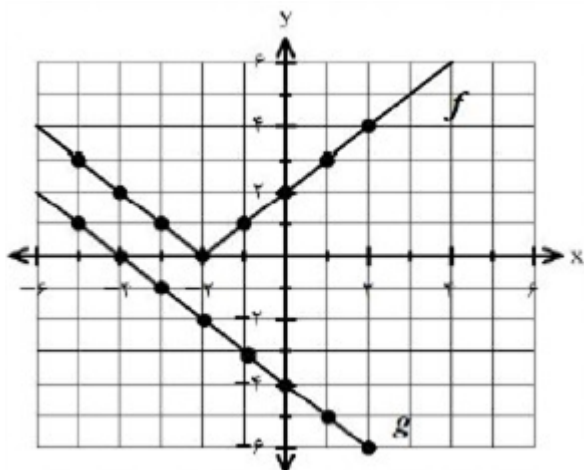
۱ پاسخ:



با توجه به نمودار تابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱) $(\text{gof})(-۱)$

۲) $(g^{-1} \text{ of})(-۲)$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۱) $(\text{gof})(-۱) = g(-۱) = -۵$

۲) $(g^{-1} \text{ of})(-۲) = g^{-1}(-۲) = -۴$

پاسخ: ۱

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید.

- چند جمله‌ای $p(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۱$ بر دو جمله‌ای بخش‌پذیر است. $((x + ۱), (x - ۱))$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ $(x + ۱)$

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید.

- نمودار تابع $f(x) = x^۳$ در بازه $(۰, ۱)$ ، از نمودار تابع $g(x) = x^۲$ قرار دارد. (بالا تر - پایین تر)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ پایین تر

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- دو تابع $f(x) = -\frac{۷}{۲}x - ۳$ و $g(x) = -\frac{۲x + ۷}{۶}$ وارون یکدیگرند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ نادرست

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- اگر $f(۷) = ۵$ و $g(۴) = ۷$ ، آن‌گاه $(f \text{ of } g)(۴) = ۵$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $y = \sqrt{۲}x^۳ - \frac{۳}{۴}x$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست



۷۵

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ نادرست

۷۶

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ وارون یک‌دیگرند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

۷۷

با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.
الف) $(g \circ f)(1)$ ب) $(f \circ (f + g))(0)$

x	-۱	۰	۱	۲
f(x)	۰	-۱	۲	-۵
g(x)	۲	۳	۴	-۲

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱

$$\text{الف) } g(f(1)) = g(2) = -2$$

$$\text{ب) } (f \circ (f + g))(0) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow (f((f + g)(0))) = f(2) = -5$$

نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x + 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله‌ی آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه‌ی نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱

مرحله ۱	مرحله ۲	مرحله ۳
$f(x) - 2 = (x - 1)^2 - 2$	$f(x + 1) - 2 = x^2 - 2$	$-f(x + 1) + 2 = -x^2 + 2$

۷۹

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- دامنه توابع چندجمله‌ای برابر R است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

۸۰ در $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} \leq \left(\frac{1}{81}\right)$ حدود x را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱

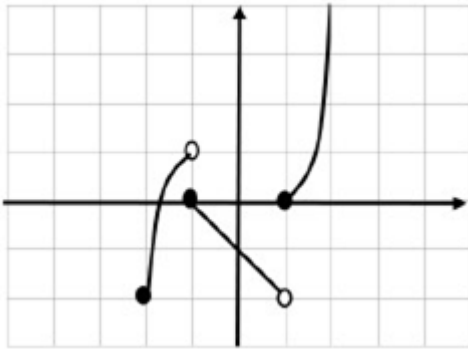
$$3^{2x-10} \leq 3^{-4}$$

$$2x - 10 \leq -4 \Rightarrow x \leq 3$$



۸۱ با رسم نمودار $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & -2 \leq x < -1 \\ -x - 1 & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & 1 \leq x \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد.

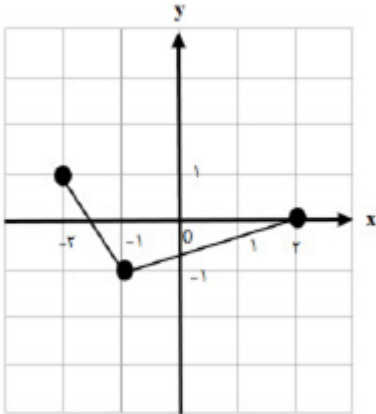
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰



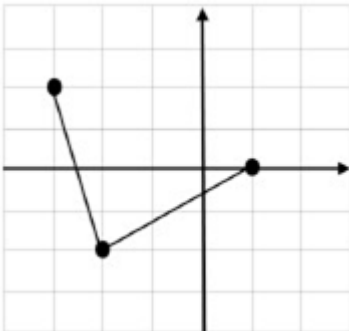
$(-2, -1)$ صعودی ، $(1, +\infty)$ صعودی
 $(-1, 1)$ نزولی

پاسخ: ۱

۸۲ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰



$D_f = [-3, 1]$
 $R_f = [-2, 2]$

پاسخ: ۱

۸۳ جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ انقباض افقی

۸۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- تابع $y = -\log_5 x + 1$ در دامنه خود، یک تابع اکیداً یک‌نوا است.

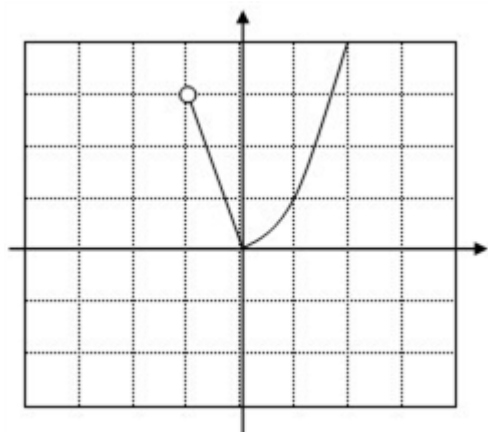
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست



۸۵ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی می‌باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

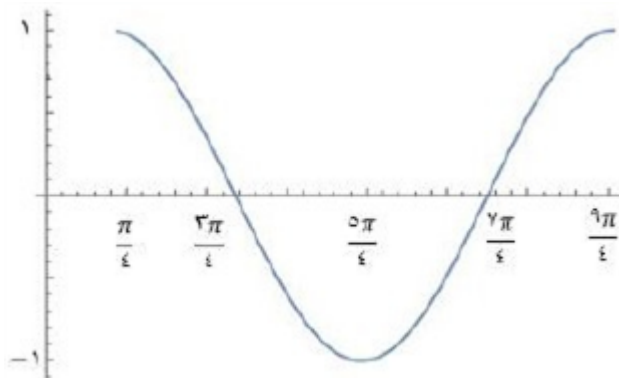
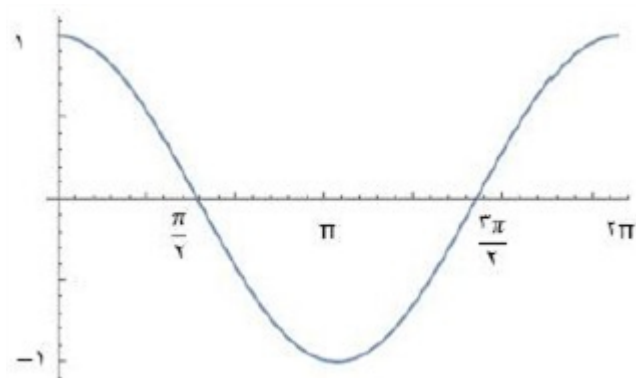


اکیدا نزولی $(-1, 0]$
اکیدا صعودی $[0, +\infty)$

پاسخ: ۱

۸۶ نمودار تابع $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰



پاسخ: ۱

۸۷ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.
- به تابعی که در یک بازه صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ یکنوا



اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد:

الف) دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $(g \circ f)(2)$ را تعیین کنید.

پاسخ: ۱

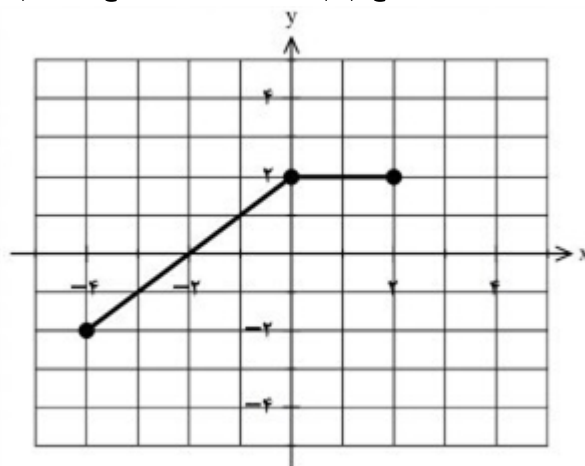
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

الف) $D_f = [1, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

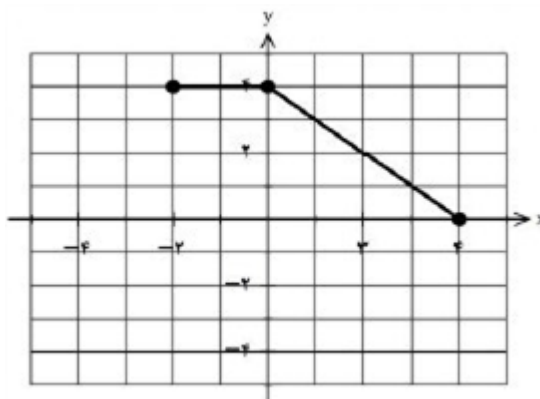
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

ب) $(g \circ f)(2) = 1$

با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰



پاسخ: ۱

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ $[-1, 1]$

۹۱ ضابطه وارون تابع $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$-5 - \sqrt{3x+1} = y \Rightarrow 3x+1 = (y+5)^2 \Rightarrow x = \frac{(y+5)^2 - 1}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{(x+5)^2 - 1}{3}$$

پاسخ: ۱

$$D_{g^{-1}} = (-\infty, -5]$$

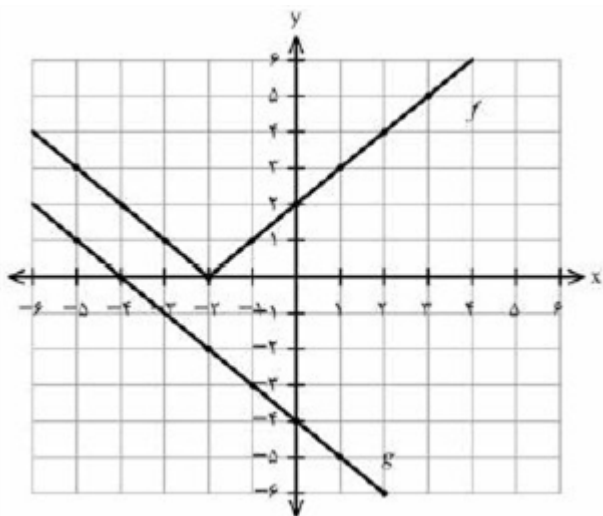


با توجه به نمودارهای تابع f , g به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار $f \circ g(-1)$ را محاسبه کنید.

ب) اگر $g(3t - 1) = 0$ آن گاه مقدار t را به دست آورید.

پ) با محدود کردن دامنه f ، بازه‌ای را مشخص کنید که تابع f یک به یک شود.



سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

الف) $g(-1) = -3 \Rightarrow f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 1$

ب) $3t - 1 = -4 \Rightarrow t = -1$

پاسخ: ۱

پ) بازه $[-2, +\infty)$

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

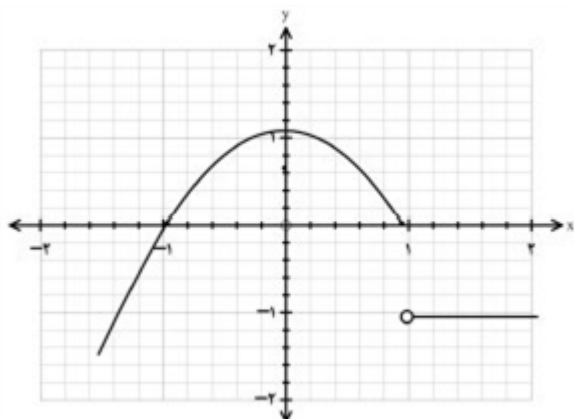
تابع $f(x)$ در بازه شامل a, b صعودی است. اگر $f(a) \geq f(b)$ آن گاه $a \leq b$

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست

۹۵ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

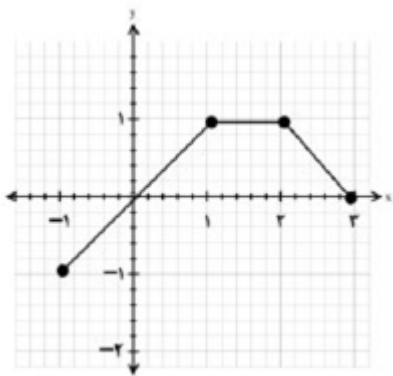


صعودی $(-\infty, 0]$ و $(1, +\infty)$
نزولی $[0, +\infty)$

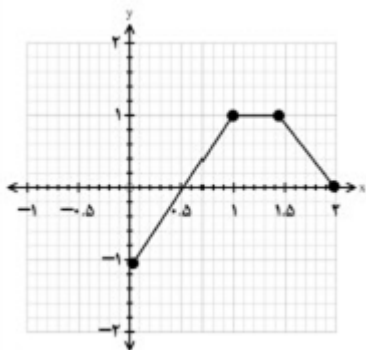
پاسخ: ۱



نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x - 1)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹



$$D_g = [0, 2] \quad R_g = [-1, 1]$$

پاسخ: ۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را بنویسید.
اگر تابع f در یک بازه نزولی اکید باشد، در این بازه نزولی نیز هست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

ضابطه وارون تابع $f(x) = -\frac{7}{3}x - 3$ را به دست آورید.

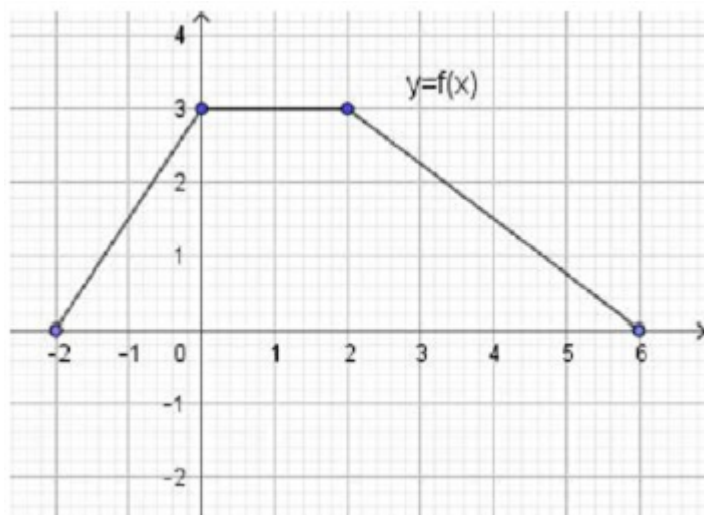
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$f(x) = -\frac{7}{3}x - 3 = y \Rightarrow -\frac{7}{3}x = 3 + y \Rightarrow x = -\frac{2y + 9}{7} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2x + 9}{7}$$

پاسخ: ۱

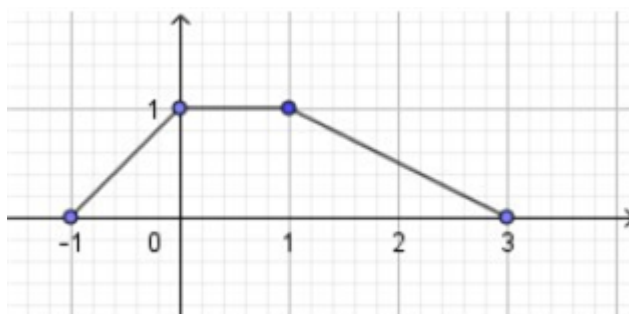


نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.



نمودار تابع $y = \frac{1}{3}f(2x)$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹



پاسخ: ۱

۱۰۰ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 - 24$ باشد:

الف) دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.
ب) ضابطه‌ی تابع fog را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$\text{الف) } D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 24 \in [1, +\infty)\} \Rightarrow D_{\text{fog}} = (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$$

$$f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 25}$$

پاسخ: ۱

۱۰۱ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

توابع اکیداً یک‌نوا، همواره هستند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ یک‌نوا

۱۰۲ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y = kf(x)$ همان دامنه‌ی تابع $y = f(x)$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

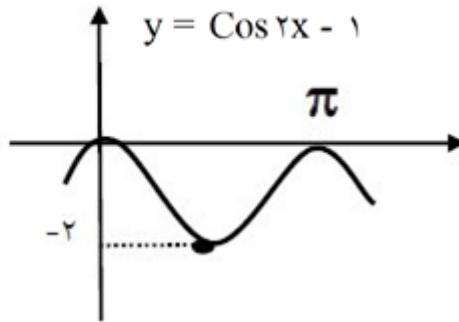
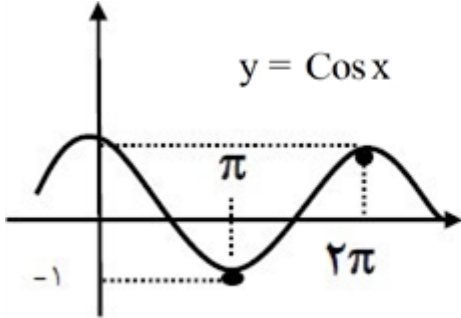
پاسخ: ۱ درست



۱۰۳ نمودار تابع مقابل را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

$$y = \cos 2x - 1$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹



پاسخ: ۱

۱۰۴ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید.
اگر بازه $[-2, 1]$ دامنه تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(3x + 1)$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ $[-1, 0]$

۱۰۵ درستی یا نادرستی عبارت زیر را بنویسید.
چندجمله‌ای $P(x) = (x + 1)^3(x - 2)^5$ یک چندجمله‌ای از درجه ۵ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

۱۰۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه اکیدا صعودی نیز خواهد بود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست

۱۰۷ اگر $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$ و $g(x) = x^2 + 2x - 1$ باشد،
الف) دامنه‌ی تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.
ب) مقدار $\text{gof}(2) - \frac{f}{g}(0)$ تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$\text{الف) } D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 2] \mid \sqrt{4 - 2x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 2]$$

پاسخ: ۱

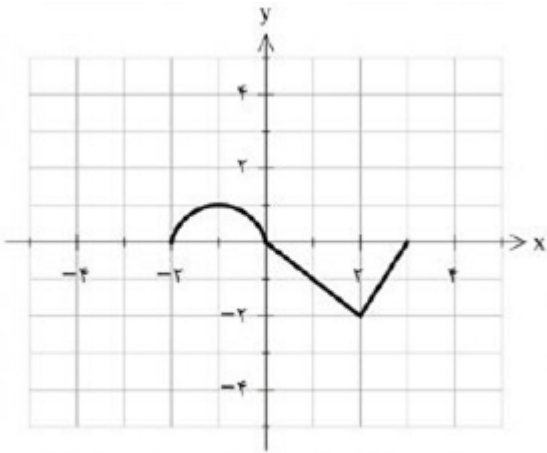
$$\text{ب) } \text{gof}(2) - \frac{f}{g}(0) = -1 - (-2) = 1$$



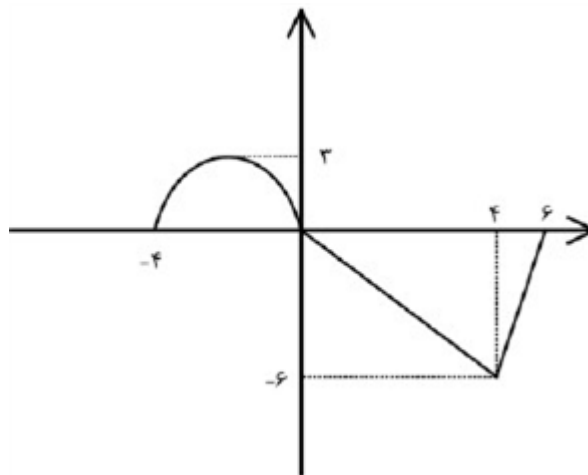
۱۰۸ نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.

الف) نمودار تابع $y = 3f\left(\frac{1}{3}x\right)$ را رسم کنید.

ب) دامنه تابع $y = 3f\left(\frac{1}{3}x\right)$ را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹



پاسخ: ۱ الف

ب) $D = [-4, 6]$

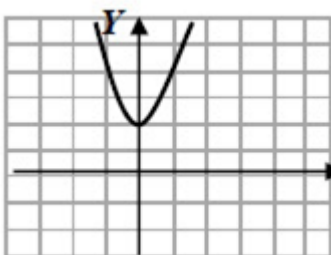
۱۰۹ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

۱۱۰ نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه‌ای این تابع اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹



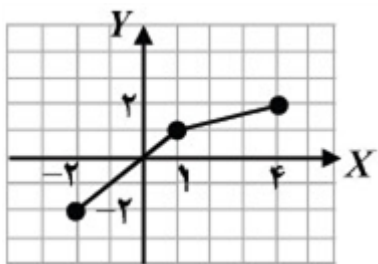
اکیدا نزولی $(-\infty, 0)$
اکیدا صعودی $(0, +\infty)$

پاسخ: ۱

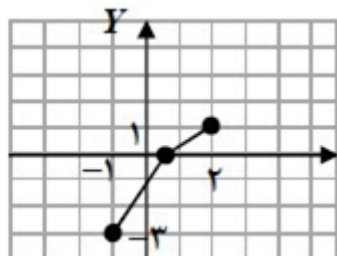
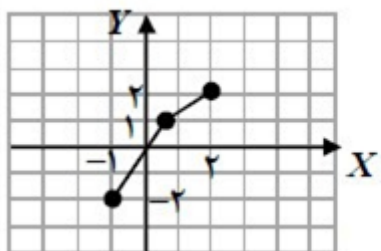


۱۱۱

با توجه به نمودار تابع f که در شکل مقابل آمده است، نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹



$$D_g = [-1, 2]$$

$$R_g = [-2, 2]$$

پاسخ: ۱

۱۱۲

نشان دهید توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{x+4}{3}\right) = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x$$

$$g \circ f(x) = g(3x - 4) = \left(\frac{3x - 4 + 4}{3}\right) = x$$

پاسخ: ۱

۱۱۳

اگر $f(x) = x^2 - 5$ و $g(x) = \sqrt{x+6}$ باشد
الف) دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.
ب) با محدود کردن دامنه‌ی تابع f تابعی وارون‌پذیر بسازید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

الف) $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-6, +\infty) \mid \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = [-6, +\infty)$

ب) $f(x) = x^2 - 5 \quad x \geq 0$

پاسخ: ۱

۱۱۴

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع نامیده می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ ثابت

۱۱۵

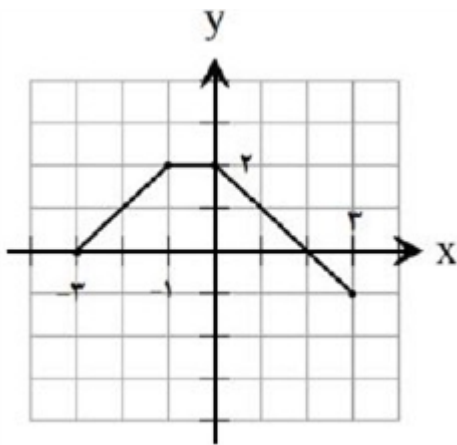
درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
برد تابع با ضابطه‌ی $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

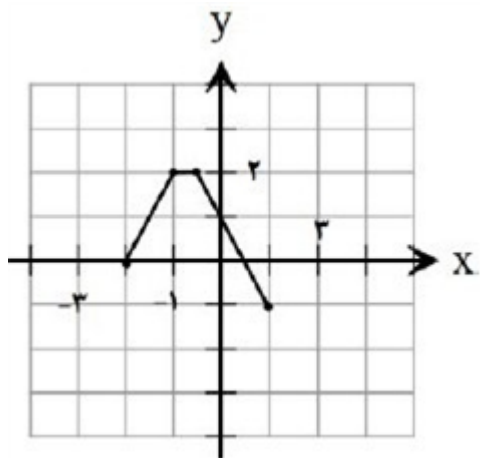
پاسخ: ۱ نادرست



نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.
نمودار تابع $g(x) = f(2x + 1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸



$$R = [-1, 2], D = [-2, 1]$$

پاسخ: ۱

۱۱۷ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ باشد، حدود x برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ $\left[\frac{8}{3}, +\infty\right)$

۱۱۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

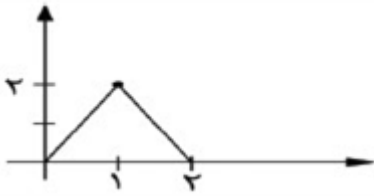
اگر تابع f در یک بازه نزولی باشد، آنگاه در این بازه اکیداً نزولی نیز می‌باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

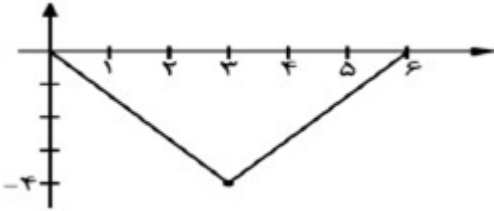
پاسخ: ۱ نادرست



۱۱۹ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. با استفاده از آن نمودار $y = -2f\left(\frac{1}{3}x\right)$ را رسم کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸



پاسخ: ۱

۱۲۰ اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^2$ باشد، مقدار $g^{-1} \circ f^{-1}(5)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$f^{-1}(x) = 8x + 24 \Rightarrow f^{-1}(5) = 64$$

$$g^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(x) = g^{-1}(64) = \sqrt{64} = 8$$

پاسخ: ۱

۱۲۱ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، دامنه‌ی تابع $\text{fog}(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{\text{fog}} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x | x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\} \\ = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

پاسخ: ۱

۱۲۲ درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.
تابع $y = -x^2 + 2$ در دامنه‌ی تعریفش صعودی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاسخ: ۱ نادرست

۱۲۳ اگر $\text{Log}(x+1) \leq \text{Log}(2x-3)$ ، حدود x را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

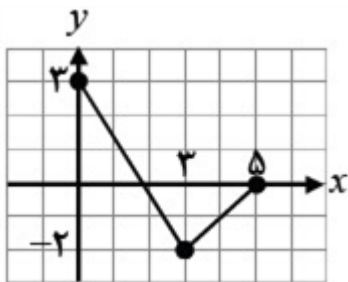
$$x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow x \geq 4$$

پاسخ: ۱

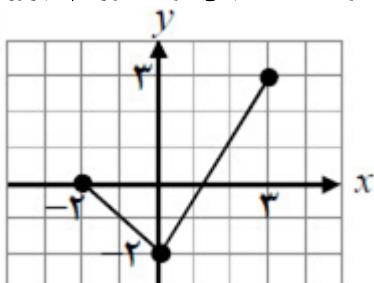


۱۲۴

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(3 - x)$ را رسم کرده و دامنه آن را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸



$$D_g = [-2, 3]$$

پاسخ: ۱

۱۲۵

تابع $h(x) = |x + 2|$ در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$(-2, +\infty)$$

پاسخ: ۱

۱۲۶

نمودار تابع $y = -f(x)$ ، قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به کدام محور است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاسخ: ۱ محور طول‌ها

۱۲۷

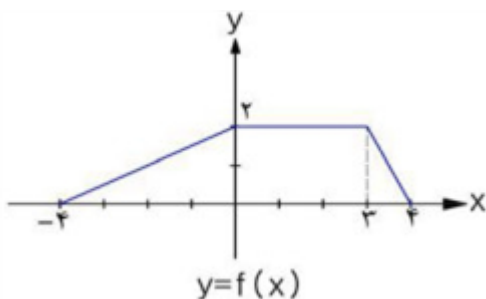
درجه تابع $f(x) = x^2(1 - x)^5$ را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

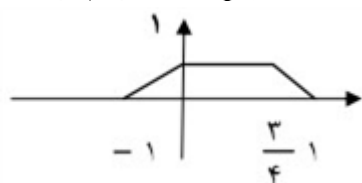
پاسخ: ۱ درجه هفت است.

۱۲۸

با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار $y = \frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸



پاسخ: ۱

۱۳۹ دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$D_{g \circ f} = \underbrace{\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}}_{0/25} = \underbrace{\{x \geq 4 \mid \sqrt{x-4} \neq \pm 1\}}_{0/5} = \underbrace{[4, 5) \cup (5, +\infty)}_{0/25}$$

پاسخ: ۱

۱۳۰ درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.

دو تابع $f(x) = \frac{-2x+6}{7}$ و $g(x) = \frac{-7}{4}x + 3$ وارون یکدیگرند. (درست، نادرست)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ درست ۰/۲۵

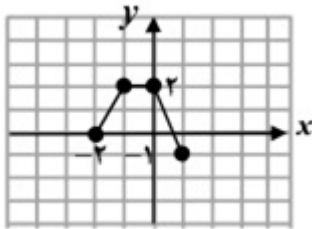
۱۳۱ در جای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.

تابع $y = (x+1)^3$ در دامنه‌ی تعریف خود (صعودی، نزولی) است.

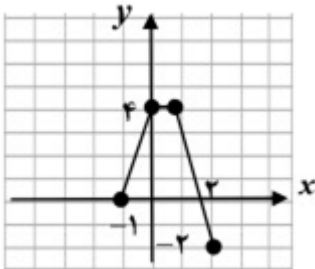
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ صعودی ۰/۲۵

۱۳۲ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸



(۰/۵)

$$D_g = [-1; 2] \quad (0/25)$$

$$R_g = [-2; 4] \quad (0/25)$$

پاسخ: ۱

۱۳۳ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را تعیین کنید.

اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ نادرست (۰/۲۵)



۱۳۴

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- دامنه تابع $y = \tan x$ ، برابر با مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ نادرست

۱۳۵

معادله مثلثاتی $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ روش اول:

$$2 \sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

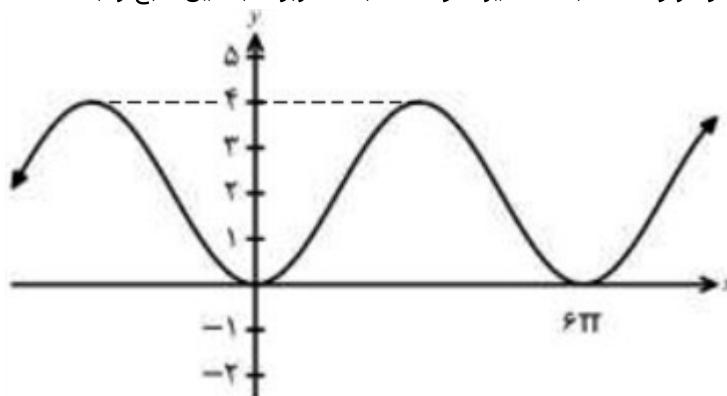
روش دوم:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

اگر دسته دوم جواب به صورت $x = k\pi + \frac{3\pi}{8}$ نوشته شده باشد، نمره تعلق بگیرد.



۱۳۶ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos(bx) + ۲$ یا $f(x) = a \sin(bx) + ۲$ است. با دقت در شکل نمودار و محاسبه مقادیر a و b ، ضابطه مربوط به این تابع را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\begin{cases} |a| + ۲ = ۴ \Rightarrow |a| = ۲ \xrightarrow{a < ۰} a = -۲ & \text{روش اول محاسبه مقدار } a \\ |a| = \frac{۴ - ۰}{۲} = ۲ \xrightarrow{a < ۰} a = -۲ & \text{روش دوم محاسبه مقدار } a \end{cases}$$

۱ پاسخ:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۶\pi \Rightarrow b = \frac{۲\pi}{۶\pi} = \pm \frac{۱}{۳}$$

$$f(x) = -۲ \cos\left(\frac{x}{۳}\right) + ۲ \quad \text{تشخیص این که تابع کسینوسی است:}$$

* در صورتی که دانش آموز هر یک از موارد $|b| = \frac{۱}{۳}$ یا $b = \frac{۱}{۳}$ یا $b = -\frac{۱}{۳}$ را نوشته باشد، نمره تعلق گیرد.

توجه: در صورتی که دانش آموز ضابطه تابع را به صورت $f(x) = -۲ \cos\left(-\frac{x}{۳}\right) + ۲$ بنویسد، نمره تعلق گیرد.

۱۳۷ جواب های کلی معادله مثلثاتی $\cos ۲x = \sin x + ۲$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$۲ + ۳ \sin x = ۱ - ۲ \sin^۲ x \Rightarrow ۲ \sin^۲ x + ۳ \sin x + ۱ = ۰$$

۱ پاسخ:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \\ \sin x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ x = (۲k + ۱)\pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

۱۳۸ دوره تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = ۲ - ۳ \sin^۴ x$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\max = |-۳| + ۲ = ۵, T = \frac{۲\pi}{|۴|} = \frac{\pi}{۲}$$

۱ پاسخ:

۱۳۹ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $f(x) = (۱ - x)^۳$ ، تابعی اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۱ پاسخ: درست



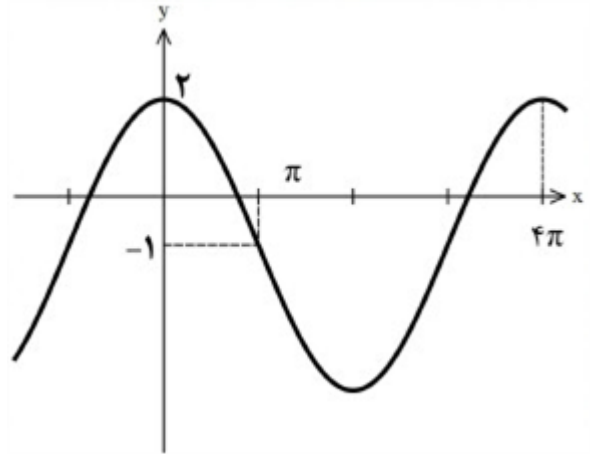
۱۴۰ معادله $\cos x (2 \cos x - 7) = 4$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ $\cos x (2 \cos x - 7) = 4 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 7 \cos x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 4 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \left(\frac{2\pi}{3}\right)$

۱۴۱ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos bx + c$ به صورت زیر است. مقدار a ، b و c را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ $T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$

$f(\pi) = -1 \Rightarrow a \cos(b\pi) + c = -1 \xrightarrow{|b|=\frac{1}{2}} a \times 0 + c = -1 \Rightarrow c = -1$

$\max = 2 \Rightarrow |a| + c = 2 \xrightarrow{c=-1} |a| = 3 \xrightarrow{a>0} a = 3$ (روش اول محاسبه a)

$f(0) = 2 \Rightarrow a + c = 2 \xrightarrow{c=-1} a = 3$ (روش دوم محاسبه a)

۱۴۲ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

برد تابع $y = \tan x$ با دامنه $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ $(-\infty, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ یا $R - (0, \sqrt{3})$

۱۴۳ مقدار مینیمم و دوره تناوب تابع $f(x) = c - 2 \sin(bx)$ به ترتیب ۴ و $\frac{\pi}{4}$ است. مقادیر $|b|$ و c را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ $\min = -2 + c = 4 \Rightarrow c = 6$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |b| = 8$



معادله مثلثاتی $\cos^2 x - 3 \cos x - 1 = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید. **۱۴۴**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$\cos^2 x - 3 \cos x - 1 = 0$$

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} \cos x = 2 \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. **۱۴۵**

تعداد جواب‌های معادله $\sin x = \frac{1}{3}$ در بازه $(0, \pi)$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۲

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. **۱۴۶**

- بازه‌ای که تابع تانژانت در آن نزولی باشد، وجود ندارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست

معادله مثلثاتی زیر را حل کنید. **۱۴۷**

$$\cos^2 x - 13 \cos x - 6 = 0$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\cos^2 x - 13 \cos x - 6 = 0 \Rightarrow \cos^2 x - 13 \cos x - 6 = 0$$

پاسخ: ۱

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos x = +\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

با توجه به محورهای کسینوس و تانژانت، اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ باشد آنگاه مقادیر $\cos \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید. **۱۴۸**

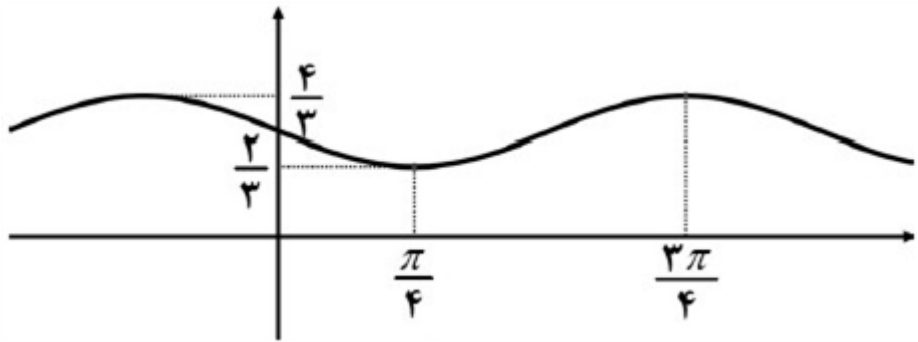
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\tan \alpha > \cos \alpha$$

پاسخ: ۱



۱۴۹ نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ به صورت زیر است. ضابطه آن را مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\begin{cases} |a| + c = \frac{4}{3} \\ -|a| + c = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} c = \frac{\max + \min}{2} \\ |a| = \frac{\max - \min}{2} \end{cases} \Rightarrow c = 1, |a| = \frac{1}{3}$$

پاسخ: ۱

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \sin(2x + 1) \text{ یا } y = \frac{1}{3} \sin(-2x) + 1$$

۱۵۰ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

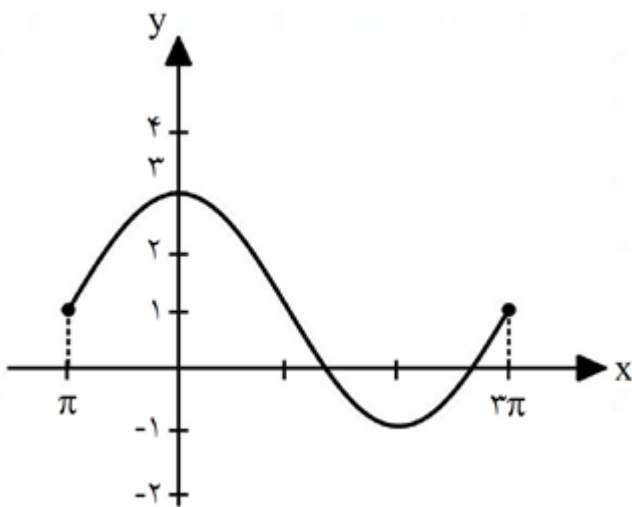
- تابع $y = \tan x$ در بازه $(\pi, 2\pi)$ صعودی است.

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست

۱۵۱ نمودار داده شده در شکل مقابل مربوط به تابع با ضابطه $y = a \cos(bx) + c$ است. اگر $b < 0$ باشد، مقادیر a ، b و c را به دست آورید. (راه حل نوشته شود).



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\begin{cases} |a| + c = 3 \\ -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ |a| = 2 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

پاسخ: ۱ روش اول:

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} c = \frac{\max + \min}{2} \Rightarrow c = 1 \\ |a| = \frac{\max - \min}{2} \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

روش دوم:

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{1}{2}$$



۱۵۲

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $y = \tan x$ در مجموعه $\left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} - [\pi, 2\pi]$ ، اکیداً صعودی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست

۱۵۳

جواب‌های معادله $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ را در بازه $(0, \pi)$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

پاسخ: ۱

$$\xrightarrow{(0, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

۱۵۴

اگر بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = a \sin(x) + c$ به ترتیب ۹ و ۳ باشد.
الف) مقادیر $|a|$ و c را بیابید. ب) دوره تناوب تابع را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\text{الف)} |a| = \frac{\text{Max} - \text{Min}}{2} = \frac{9 - 3}{2} = 3$$

پاسخ: ۱

$$c = \frac{\text{Max} + \text{Min}}{2} = \frac{9 + 3}{2} = 6$$

$$\text{ب)} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

۱۵۵

جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.
مقدار عددی عبارت $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ $\frac{1}{4}$

۱۵۶

معادله $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

پاسخ: ۱ روش اول:

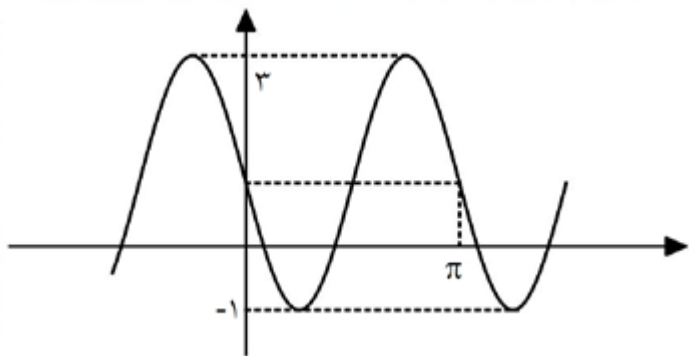
$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

روش دوم:



نمودار داده شده در شکل مقابل مربوط به تابع با ضابطه $y = a \sin bx + c$ است. با فرض $a > 0$ ، مقادیر a ، b و c را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\begin{cases} c = 1 \\ |a| = 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

$$T = \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \xrightarrow{b < 0} b = -2$$

۱۵۸ جواب‌های معادله مثلثاتی $2 \sin^4 x = 1$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ هستند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$\sin^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24}$$

پاسخ: ۱

$$4x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{24}, \frac{\pi}{24}$$

۱۵۹ مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = a \cos \frac{x}{2} + 3$ برابر ۶ می‌باشد، $|a|$ و دوره تناوب را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$|a| + 3 = 6 \Rightarrow |a| = 3$$

پاسخ: ۱

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

۱۶۰ جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

اگر α یک زاویه حاده و $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ ، حاصل $\cos^2 \alpha$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $\frac{17}{25}$

۱۶۱ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

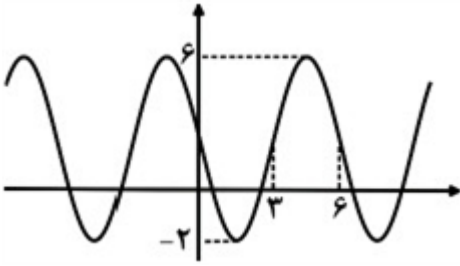
- فقط دو زاویه وجود دارد که مقدار کسینوس آن $\frac{2}{5}$ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست



۱۶۲ نمودار مقابل مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \sin(bx) + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max = 4 \\ \min = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |a| = 3$$

$$y = a \sin bx + c \Rightarrow y = -3 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1 \quad (\text{یا}) \quad y = +3 \sin\left(-\frac{\pi}{3}x\right) + 1$$

پاسخ: ۱

۱۶۳ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- تابع تانژانت در بازه $(-\pi, \pi)$ ، تابعی صعودی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

۱۶۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- دوره تناوب تابع $y = 5 \cos \frac{x}{4} + 1$ برابر با 4π است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست

۱۶۵ معادله مثلثاتی $2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

پاسخ: ۱

۱۶۶ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید.

$$y = \sqrt{3} - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow T = 4 \quad \text{Max : } |a| + c = 1 + \sqrt{3}$$

$$\text{Min : } -|a| + c = -1 + \sqrt{3}$$

پاسخ: ۱



۱۶۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- خط $y = \frac{1}{2}$ ، نمودار تابع $y = \sin x$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ در یک نقطه قطع می‌کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

۱۶۸ جواب‌های معادله مثلثاتی $4 \sin x + 2\sqrt{3} = 0$ را در بازه $[0, 2\pi]$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$4 \sin x + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{[0, 2\pi]} \begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

۱۶۹ ضابطه تابعی به صورت $y = a \cos bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن ۲، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن -۱ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi$$

$$|a| = 2, c = 1 \Rightarrow y = -2 \cos(\pi x) + 1 \text{ یا } y = 2 \cos(\pi x) + 1$$

تنها نوشتن یکی از ضابطه‌های بالا کافی است.

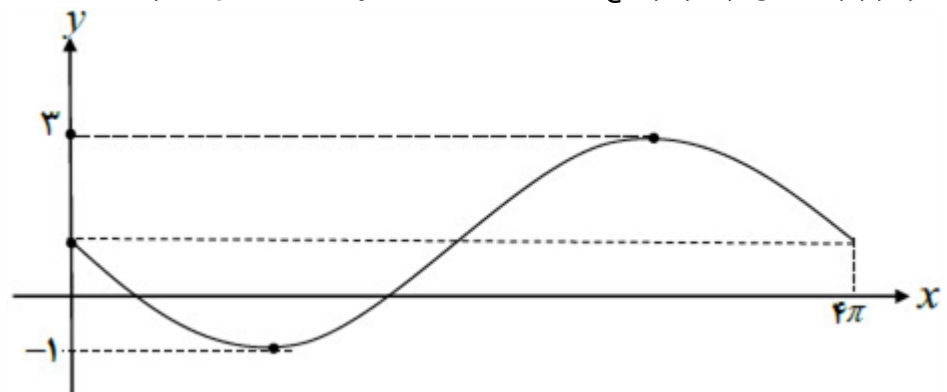
۱۷۰ جواب(های) معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x = 0$ را در بازه $(0, \pi)$ مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

۱۷۱ نمودار زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin bx + 1$ است. حاصل ab را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$|a| = \frac{3 - (-1)}{2} = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

با توجه به نمودار تابع، ab باید عدد منفی شود بنابراین $ab = -1$



۱۷۲ معادله $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

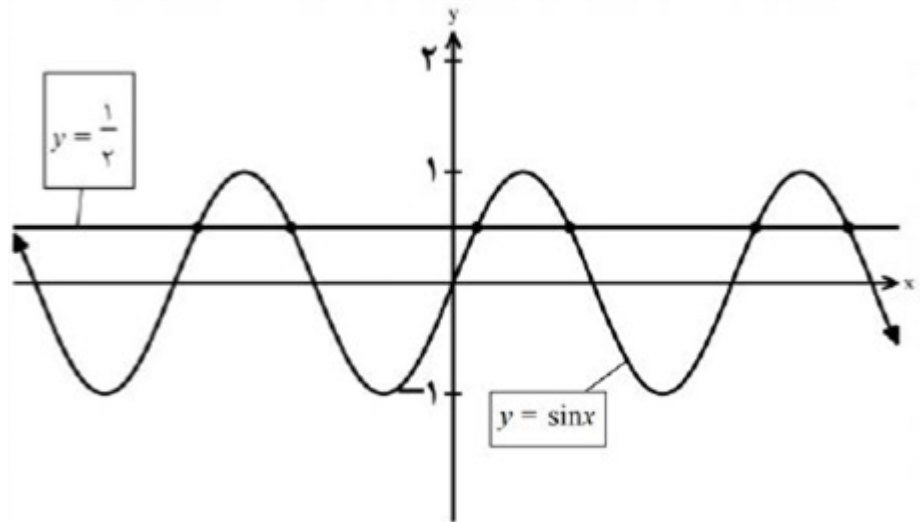
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

۱۷۳ نمودار تابع $y = \sin x$ با ضابطه $y = \frac{1}{2}$ در دستگاه زیر، رسم شده است. طول نقاط برخورد آن‌ها را بیابید.



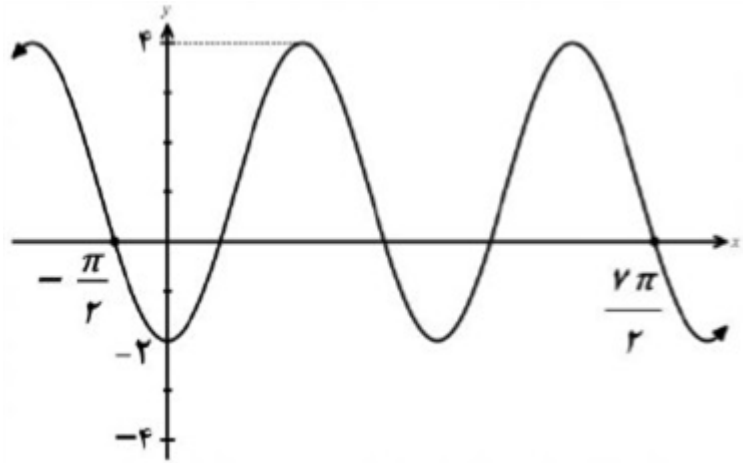
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

پاسخ: ۱



۱۷۴ نمودار تابع با ضابطه $y = a \cos bx + c$ به صورت زیر رسم شده است. مقدار a ، b و c را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$2T = \frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \Rightarrow T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow b = \pm 1$$

پاسخ: ۱

$$c = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} |a| &= \frac{4 - (-2)}{2} = 3 \\ x = 0 \text{ در} \\ &\Rightarrow a < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -3$$

۱۷۵ معادله مثلثاتی $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$ را در بازه $0 \leq x \leq \pi$ حل کنید.

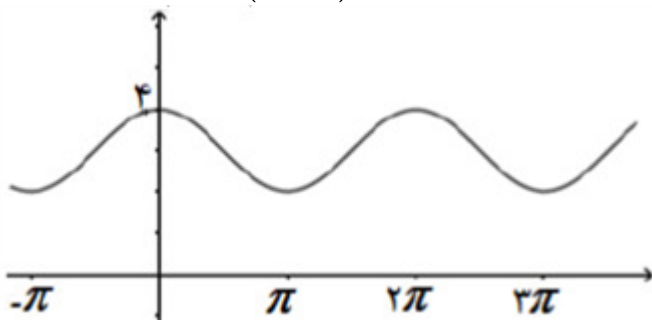
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۱۷۶ نمودار تابع $f(x) = a + \cos bx$ به صورت مقابل است. حاصل $a + b$ را به دست آورید. ($b > 0$)



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$\text{Max} = 4 \Rightarrow a + 1 = 4 \Rightarrow a = 3$$

پاسخ: ۱

$$T = 2\pi : \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = 1 \quad a = 3 \quad a + b = 4$$



$$\cos^2 x - 3 \sin x + 4 = 0$$

معادله مقابل را حل کنید. ۱۷۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$1 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 4 = 0 \Rightarrow -2 \sin^2 x - 3 \sin x + 5 = 0$$

پاسخ: ۱

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{5}{4} \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 3 \cos(\pi x) + 2$ را به دست آورید. ۱۷۸

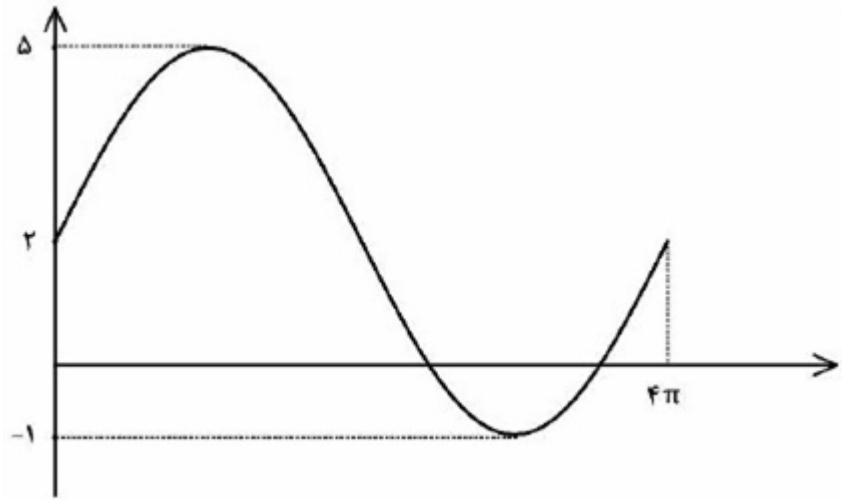
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$$

پاسخ: ۱

$$\max = |a| + c = 5 \quad \min = -|a| + c = -1$$

نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \sin bx + c$ است. مقادیر a و b و c را محاسبه کنید و ضابطه آن را مشخص نمایید. ۱۷۹



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow c = 2, a = \pm 3$$

پاسخ: ۱

$$4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3 \sin \frac{x}{2} + 2, y = -3 \sin \left(-\frac{x}{2}\right) + 2$$

معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + \cos x = 0$ را حل کنید. ۱۸۰

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\cos x (2 \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. ۱۸۱

- تابع تانژانت در هر بازه‌ای که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ درست



۱۸۲ معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۱۸۳ معادله‌ی یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب آن ۲ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$\begin{aligned} |b| &= \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow b = \pm\pi \\ |a| &= \frac{4 - (-4)}{2} = 4 \Rightarrow a = \pm 4 \\ c &= \frac{4 + (-4)}{2} = 0 \end{aligned} \Rightarrow y = \pm 4 \sin(\pm \pi x)$$

پاسخ: ۱

۱۸۴ معادله مثلثاتی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$\sin 2x - \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۱۸۵ جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- دورهٔ تناوب تابع $y = 2 \sin\left(\frac{-\pi}{4}x\right) + 2$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۴

۱۸۶ ضابطه تابعی به فرم $y = a \cos bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن ۲ و مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار مینیمم آن -۲ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

هریک از توابع $y = -3 \cos(\pi x) + 1$ یا $y = 3 \cos(\pi x) + 1$ یا $y = 3 \cos(-\pi x) + 1$ و یا $y = -3 \cos(-\pi x) + 1$ نوشته شود مورد قبول است.

۱۸۷ معادله مثلثاتی $\cos 2x - \sin x + 1 = 0$ را حل کنید.

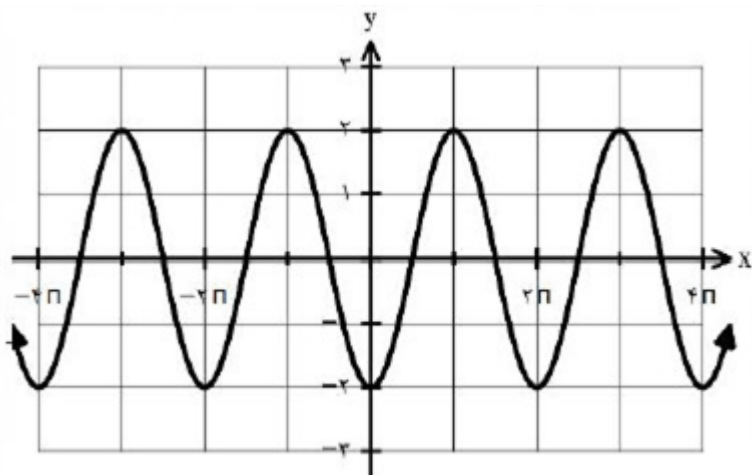
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$\cos 2x - \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

پاسخ: ۱



نمودار زیر برای تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ است. با دقت به شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص کنید.



سوالان امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$|a| = \frac{2 - (-2)}{2} = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$|b| = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \Rightarrow b = 1 \quad f(x) = -2 \cos x$$

$$c = \frac{2 + (-2)}{2} = 0$$

پاسخ: ۱

حاصل عبارت $\cos^2 x \cos x \sin x$ را به ازای $x = 5^\circ$ محاسبه نمایید.

سوالان امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$2 \sin^2 x \cos^2 x = \sin^4 x = \sin^4(5^\circ) = \frac{1}{2}$$

پاسخ: ۱

مثلثی با مساحت $8\sqrt{2}$ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

سوالان امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 8 \sin \theta = 8\sqrt{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ, \theta = 135^\circ$$

پاسخ: ۱

دو مثلث می‌توان رسم کرد.

معادله‌ی یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار مینیمم آن -۱ و دوره‌ی تناوب آن 8π است.

سوالان امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$|a| = \frac{5 - (-1)}{2} = 3 \Rightarrow a = \pm 3, c = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$$

پاسخ: ۱

$$|b| = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4} \quad y = \pm 3 \sin\left(\pm \frac{1}{4}x\right) + 2$$



معادله $2 \sin x \cos x + 3 \cos x = 0$ را حل کنید. **۱۹۲**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\cos x (2 \sin x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

$$\sin x = -\frac{3}{2} \text{ قابل قبول نیست}$$

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 9 - 2\pi \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ را محاسبه کنید. **۱۹۳**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\max = |a| + c = |-2\pi| + 9 = 2\pi + 9$$

پاسخ: ۱

$$\min = -|a| + c = -|-2\pi| + 9 = -2\pi + 9$$

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$$

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. **۱۹۴**

- در بازه $2\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ مقدار $\operatorname{tg} \theta$ از مقدار $\sin \theta$ کوچکتر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x = \sin x - 1$ را حل کنید. **۱۹۵**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$-2 \sin^2 x - \sin x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \text{ غ ق} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

ضابطه تابع مثلثاتی سینوس با دوره تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ بنویسید. **۱۹۶**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$|b| = \frac{2\pi}{3}$$

پاسخ: ۱

$$|a| = 1, c = 4 \Rightarrow y = \sin \frac{2\pi}{3} x + 4 \text{ یا } y = -\sin \frac{2\pi}{3} x + 4$$

تنها نوشتن یکی از ضابطه‌های بالا کافی است.

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. **۱۹۷**
- برد تابع تانژانت $y = \tan x$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ R



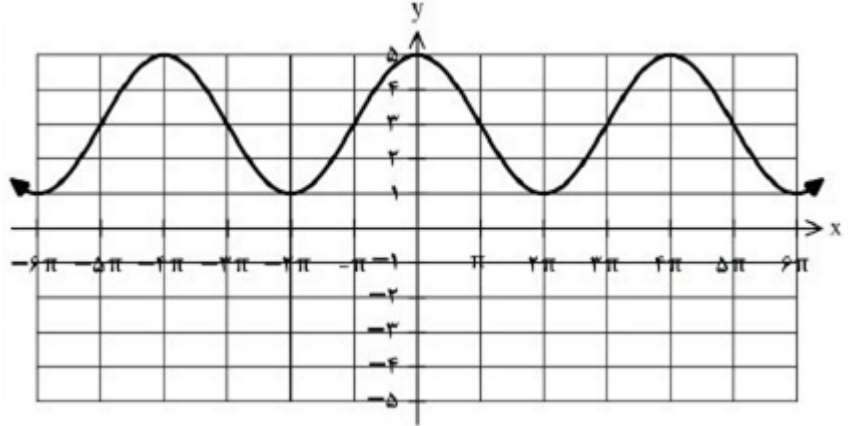
۱۹۸ معادله‌ی مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۱۹۹ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$c = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$|a| = \frac{5 - 1}{2} = 2 \quad a > 0, a = 2$$

$$b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3$$

$$\Rightarrow y = 2 \cos\left(-\frac{x}{2}\right) + 3 \quad \text{یا}$$

پاسخ: ۱

۲۰۰ دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)

$$y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

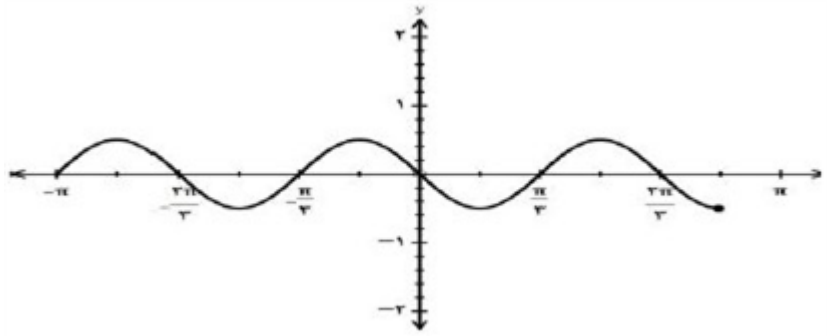
$$\left. \begin{array}{l} \min = -|a| + c \\ \max = |a| + c \end{array} \right\} \text{الف} \quad \max = 8 \quad \min = -8$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$$

پاسخ: ۱



۲۰۱ در شکل نمودار زیر، با تعیین مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع، ضابطه‌ی آن را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۱ پاسخ: با توجه به نمودار ضابطه به صورت $y = a \sin bx + c$, $a = -\frac{1}{3}$, $b = 3$ می‌شود.

$$\max y = \frac{1}{3}, \min y = -\frac{1}{3}, T = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \sin 3x$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}$$

۱ پاسخ:

۲۰۲ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

دامنه تابع با ضابطه‌ی $y = \tan x$ به صورت $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \dots\}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۲۰۳ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
برد تابع $f(x) = \tan x$ برابر بازه‌ی $[-1, 1]$ است.

۱ پاسخ: نادرست

۲۰۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را بنویسید.
مقدار تابع سینوس در $x = \frac{\pi}{3}$ تعریف نشده است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۱ پاسخ: نادرست

۲۰۵ مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

۱ پاسخ:

۲۰۶ معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{4} \\ \sin x = -\frac{5}{4} \text{ غ ق} \end{cases}$$

۱ پاسخ:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود) **۲۰۷**

$$y = \pi \sin(-x) + 1$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c = \pi + 1 \\ \min &= -|a| + c = -\pi + 1 \end{aligned} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$$

پاسخ: ۱

معادله مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید. **۲۰۸**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi - x \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

پاسخ: ۱

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sqrt{5} - \pi \cos \frac{1}{4}x$ را محاسبه کنید. **۲۰۹**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$\max = \pi + \sqrt{5}, \min = -\pi + \sqrt{5}, T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

پاسخ: ۱

معادله‌ی مثلثاتی $\cos x (2 \cos x - 5) = 5$ را حل کنید. **۲۱۰**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \cos x = 5 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

غ ق ق غ

$$y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4}x$$

دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. **۲۱۱**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c = 1 + \sqrt{3} \\ \min &= -|a| + c = -1 + \sqrt{3} \end{aligned} \quad T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$$

پاسخ: ۱

معادله $2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید. **۲۱۲**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

پاسخ: ۱

مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 + 2 \sin^2 x$ را به دست آورید. **۲۱۳**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$\begin{cases} \max y = |a| + c = 2 + 1 = 3 \\ \min y = -|a| + c = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

پاسخ: ۱



۲۱۴ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید.

دوره تناوب تابع $y = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ 6π

۲۱۵ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را تعیین کنید.

نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ در دامنه تابع تنازات قرار ندارند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ درست (۰/۲۵)

۲۱۶ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

دوره تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ π

۲۱۷ معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱
$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۲۱۸ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود).

$$y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱
$$\begin{aligned} \min &= -|a| + c & \max &= \pi - 2 & \min &= -\pi - 2 \\ \max &= |a| + c \\ T &= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi \end{aligned}$$

۲۱۹ معادله $2\cos^3 x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱
$$\cos^3 x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18}$$

۲۲۰ ضابطه تابعی به صورت $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π ، مقدار ماکزیمم آن ۶ و مقدار مینیمم آن -۲ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱
$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 6 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

هریک از توابع $y = 4 \sin(2x) + 2$ یا $y = -4 \sin(2x) + 2$ یا $y = 4 \sin(-2x) + 2$ یا $y = -4 \sin(-2x) + 2$ صحیح است هر مورد نوشته شود مورد قبول است.



۲۲۱) معادله‌ی مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$2 \times \left(\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$$

پاسخ: ۱

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8}$$

۲۲۲) دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos 2\pi x + 1$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1, \max = |-3| + 1 = 4, \min = -|-3| + 1 = -2$$

پاسخ: ۱

۲۲۳) معادله مثلثاتی $\sin 3x = \sin 2x$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

پاسخ: ۱

$$3x = (2k + 1)\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{(2k + 1)\pi}{5} (k \in \mathbb{Z})$$

۲۲۴) کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در بازه $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ اکیداً صعودی است.

ب) نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ در دامنه تابع تانژانت قرار دارند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاسخ: ۱ الف) درست ب) نادرست

۲۲۵) دوره تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos(\pi x) + 1$ را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \max = |-3| + 1 = 4, \min = -|-3| + 1 = -2$$

پاسخ: ۱

۲۲۶) درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.

دوره‌ی تناوب تابع $y = \tan x$ برابر 2π است. (درست، نادرست)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ نادرست ۰/۲۵

۲۲۷) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2 \sin\left(\frac{-\pi}{3} x\right)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\max = |-2| + 1 = 3, \min = -|-2| + 1 = -1$$

پاسخ: ۱



جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. **۲۲۸**

دوره تناوب تابع $y = 3 \cos\left(-\frac{\pi}{4}x\right)$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ ۸ (۰/۲۵)

سوال ۸۲

فصل ۳: حد بینهایت

حدود زیر را محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است.) **۲۲۹**

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt{x} - 2} \quad \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + 4}{x^3 + x^5} \quad \text{پ)} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x] - 4}{4 - x} \end{aligned}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ الف) روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x - 8)(\sqrt{x} + 2)}{x - 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt{x} + 2) = 12 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt{x} + 2) = 12$$

به روش فاکتورگیری هم به تناسب نمره داده شود.

$$\text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + 4}{x^3 + x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{x^5} = 2$$

$$\text{پ)} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x] - 4}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{4 - x} = -\infty$$

حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.) **۲۳۰**

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x] + \cos x}{\sin x} \quad \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + 5x + 2}{\sqrt{x^3} + 3x^2} \end{aligned}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ الف) روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x] + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x] + \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{[x]}{\sin x} + \cot x \right) = 0 + \infty = +\infty$$

روش دوم:

$$\text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + 5x + 2}{\sqrt{x^3} + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3}{\sqrt{x^3}} = \frac{-4}{\sqrt{x}}$$

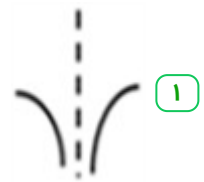
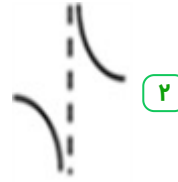
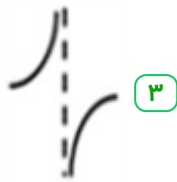
مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر با ۲ باشد. **۲۳۱**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\begin{aligned} p(-2) &= 0 \\ p(1) &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = \frac{11}{3} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۲۳۲ کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}$ را در همسایگی $x = 0$ نمایش می‌دهد؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
 تابع $1 - \cos x$ در یک همسایگی محذوف صفر، مثبت است.

۲۳۳ اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^2 + a - 2$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = -2$$

پاسخ: ۱

۲۳۴ حدهای زیر را محاسبه کنید. (نماد جزء صحیح است.)

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{-x^5 + 2x^2 - 3}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2[-x] + 1}{|x - 2|}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

الف) $\frac{2(-2) + 1}{|2^- - 2|} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-x^3} = 0$

پاسخ: ۱

۲۳۵ جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.
 بازه $(9, 7)$ یک همسایگی راست عدد است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ ۷

۲۳۶ جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.
 باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $2x^3 - 5x + 2$ بر $x + 1$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ ۳



۲۳۷) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2 - \frac{3}{x^2}} =$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} \frac{1}{\sin x} =$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x} + 1} =$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\text{الف) } -\frac{1}{2}$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \frac{1}{(0)^-} = -\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x} + 1} \times \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2} - \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+2)(\sqrt{x^2} - \sqrt{x} + 1)}{(x+1)} = 3$$

۲۳۸) جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر $x + 2$ ، باقی مانده تقسیم برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ صفر

۲۳۹) حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x-3)^2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x^2}{-x^3|x| - 2}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x-3)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-x^3(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^4} = 0$$

۲۴۰) اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - k$ بخش پذیر باشد، مقدار k را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$x - k = 0 \Rightarrow x = k \Rightarrow p(k) = 0 \Rightarrow k^3 + k^3 + 2 = 0 \Rightarrow k^3 = -1 \Rightarrow k = -1$$

پاسخ: ۱

۲۴۱) جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x}$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ صفر (یا ۰)



حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد [] علامت جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3}$

د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = 2$

پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3}{2x^3} = -3$

حدهای زیر را محاسبه کنید. (نماد [] علامت جزء صحیح است.)

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x + 1)$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{1 - x^2}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[2x] - 1}{x - 1}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[2x] - 1}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = +\infty$

۲۴۴ اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + mx + 2$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 1$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$p(2) = 0 \Rightarrow 8 + 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = -5$

پاسخ: ۱

$p(-1) = 6$

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ $-\infty$



۲۴۶) حدهای زیر را محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x - 2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x - 4x^2}{3x + 2x^2}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x - 4x^2}{3x + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{2x^2} = -2$

۲۴۷) جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

بازه $(-2, 0)$ ، یک همسایگی چپ برای عدد است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ صفر

۲۴۸) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 2x^2 - x^2 + 1$ بر $x - 1$ برابر ۲ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست

۲۴۹) حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 10x + 25}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4 - x + x^2}{5 - 2x^2}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

الف) $\lim_{x \rightarrow (-5)^-} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 10x + 25} = \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{(x+5)(x-3)}{(x+5)(x+5)} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$

پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 4}{-2x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-2x^2} = -\frac{1}{2}$

۲۵۰) اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 3x^2 + mx + 2m + 1$ بر $x - 2$ برابر ۳ باشد، باقی مانده تقسیم چند

جمله‌ای $f(x) = mx^2 - mx + 3$ بر $x + 2$ را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$p(2) = 3 \Rightarrow 12 + 2m + 2m + 1 = 3 \Rightarrow 4m = -10 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$

پاسخ: ۱

$f(-2) = -\frac{5}{2}(-2)^2 - \left(-\frac{5}{2}\right)(-2) + 3 = -12$

۲۵۱) درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin x}$ برابر با $-\infty$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست



$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 2}{x-1}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{|2-x|}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

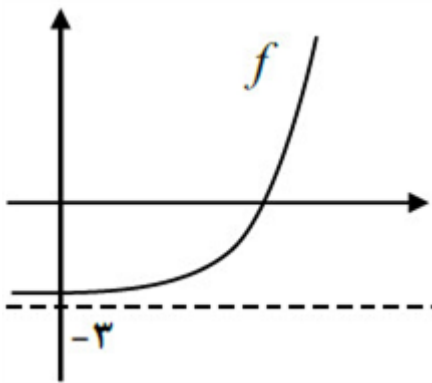
$$\text{الف) } \frac{3}{0^+} = +\infty$$

پاسخ: ۱

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 2}{x-1} &\times \frac{\sqrt[3]{x+1} + 2}{\sqrt[3]{x+1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt[3]{x+1} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x+1} + 2)} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

به روش‌های هم‌ارزی و هوییتال نمره تعلق نمی‌گیرد.

۲۵۳ با توجه به نمودار تابع f ، حاصل حدهای زیر را به دست آورید.



$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \dots \\ \text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \dots \end{aligned}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$\text{الف) } -3 \quad \text{ب) } +\infty$$

پاسخ: ۱

۲۵۴ حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x - 1}{2 + x - x^4}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - 1}{(x-1)^2}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - 1}{(x-1)^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x - 1}{2 + x - x^4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{-x^4} = -1$$

۲۵۵ مقادیر a و b را چنان بیابید که عبارت $p(x) = x^3 - ax + b$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر باشد و باقیمانده تقسیم آن بر $(x+1)$ برابر ۳ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$\begin{aligned} P(2) = 0 &\Rightarrow 8 - 2a + b = 0 \\ P(-1) = 3 &\Rightarrow a + b = 4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -8 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

پاسخ: ۱

۲۵۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- عبارت $x^6 + 1$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست



۲۵۷) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{|\sin x|}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x^5}{x^2 - x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = 3$

پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{|\sin x|} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x^5}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5}{x^2} = +\infty$

۲۵۸) آیا مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x]-1}$ وجود دارد؟ چرا؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ خیر - زیرا تابع $f(x) = \frac{1}{[x]-1}$ در همسایگی راست $x=1$ تعریف نشده است.

۲۵۹) حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{5x}{|2x-1|}$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x+3}{x^2+6x+9}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

الف) $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{5x}{|2x-1|} = \frac{\frac{5}{2}}{0^+} = +\infty$

پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x+3}{x^2+6x+9} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

۲۶۰) اگر چند جمله‌ای $x^2 + ax - 8$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$x = a \Rightarrow 2a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$

پاسخ: ۱

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

۲۶۱) حد مقابل را در صورت وجود محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)\sqrt{x}+1} = \frac{1}{4}$

پاسخ: ۱

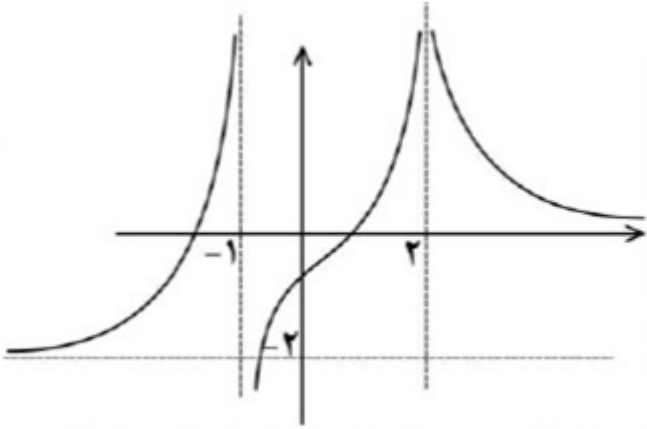


نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف) $-\infty$

ب) $+\infty$

پ) -2

پاسخ: ۱

۲۶۳ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax - 3}{(2 - x)^3} = +\infty$ باشد، حدود a را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax - 3}{(2 - x)^3} = \frac{2a - 3}{0^-} = +\infty \Rightarrow 2a - 3 < 0 \Rightarrow a < \frac{3}{2}$$

پاسخ: ۱

۲۶۴ در چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ برابر -1 و $P(x)$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$\begin{cases} p(-2) = -1 \\ p(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 7 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{8}{3}, b = -\frac{11}{3}$$

پاسخ: ۱



۲۶۵) حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x}{5x + 4}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \times \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{6}$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-} = -\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{5x} = -\frac{1}{5}$$

۲۶۶) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- بازه $(2, 5)$ ، یک همسایگی ۴ است.

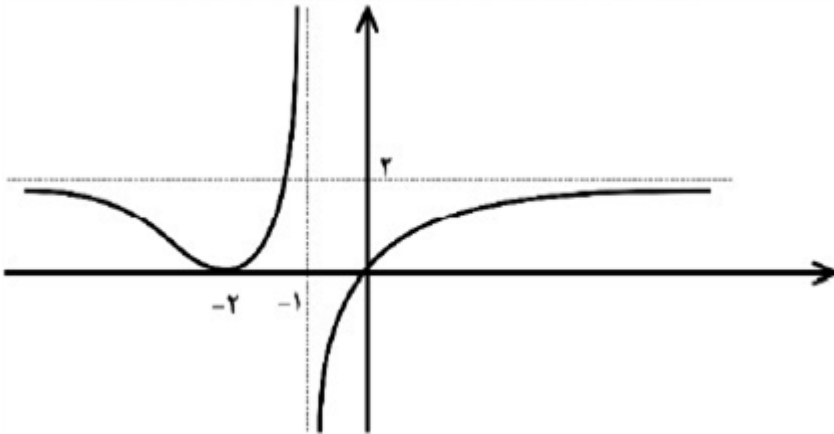
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ درست

۲۶۷) با توجه به نمودار تابع f ، موارد زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$$

$$\text{ب) } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \end{cases}$$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۲) الف) پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \end{cases}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{2}{\operatorname{tg} x} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 2x + 1}{4x - 1} \end{array} \right\}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\left. \begin{array}{l} \text{الف) } \frac{1-2}{2-2} = \frac{-1}{0} = +\infty \end{array} \right\}$$

پاسخ: ۱

$$\left. \begin{array}{l} \text{ب) } \frac{2}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} = \frac{2}{-\infty} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4} = +\infty \end{array} \right\}$$

۲۶۹ اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^4 + kx^2 - 3$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، k را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow p(-1) = 2 \Rightarrow (-1)^4 + k(-1)^2 - 3 = 2 \Rightarrow k = 4$$

پاسخ: ۱

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 7x + 3}$$

۲۷۰ حد مقابل را در صورت وجود محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(2x-1)} = \frac{1}{5}$$

پاسخ: ۱



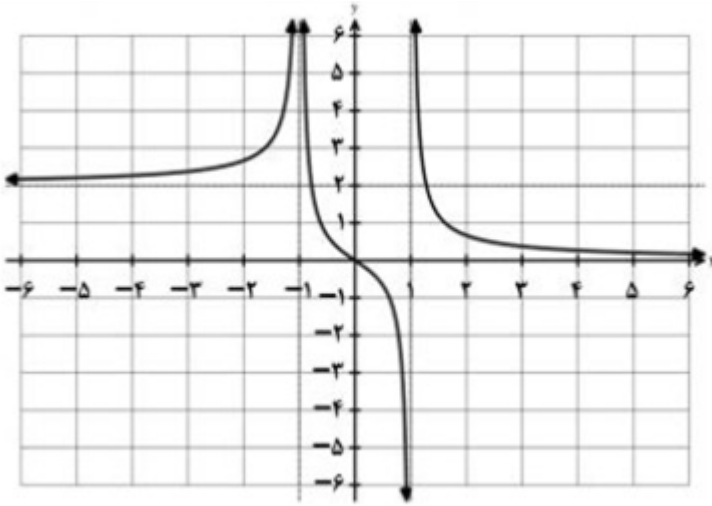
نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حدود خواسته شده را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

ت) $\lim_{x \rightarrow (1)^-} f(x) =$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

پاسخ: ۱

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
- باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 5x + 1$ بر $x - 3$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ ۴

حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^2}{2x - 1}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)^2} = \frac{+4}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{2} = -\infty$

پاسخ: ۱

باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $2 + 4x^2 - 8x^3 = p(x)$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{-1}{2}\right) = 0 = r$

پاسخ: ۱



۲۷۵) حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{[x] - 2}{|3x - 1|}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x + 2}{5 - x} - \frac{8}{x} \right)$

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = -\infty$

ب) -4

۲۷۶)

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ بر $(x + 2)$ و $(x - 1)$ بخش‌پذیر باشد.

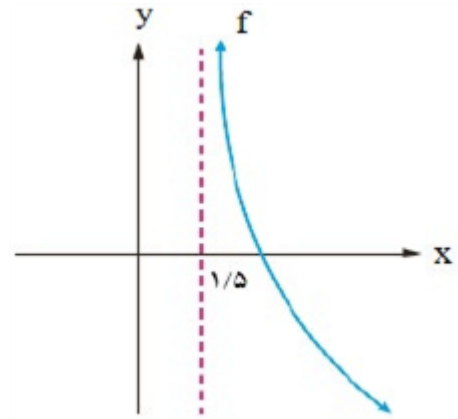
پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$\begin{aligned} -8 + 4a - 2b + 2 &= 0 \Rightarrow 4a - 2b = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2} + \frac{b}{2} \\ 1 + a + b + 2 &= 0 \Rightarrow a + b = -3 \Rightarrow b = -3 - a \end{aligned}$$

۲۷۷)

جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.
- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow (1/5)^+} f(x)$ برابر با است.



پاسخ: ۱ $+\infty$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۲۷۸) حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sin^2 x}$

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x)(2x - 1)}{(2x + 1)(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x)}{(2x + 1)} = \frac{1}{4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sin^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

۲۷۹)

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید.
- چند جمله‌ای $p(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله‌ای بخش‌پذیر است. $((x + 1), (x - 1))$

پاسخ: ۱ $(x + 1)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰



حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ۲۸۰

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \operatorname{tg} x$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^5 + 5x^2}{2x^2 + 9}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{(x - 1)(x + 2)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)(x + \sqrt{x})} = \frac{1}{6}$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{-} = -\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5(-4 + \frac{5}{x^5})}{x^2(2 + \frac{9}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2)x^3 = -\infty$$

حدهای زیر را محاسبه کنید. ۲۸۱

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\frac{4}{x} - 2}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 1}{|x - 2|}$$

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\text{الف) } \frac{3}{+} = +\infty$$

$$\text{ب) } \frac{3 + 0}{0 - 2} = \frac{-3}{2}$$

۲۸۲ باقیمانده تقسیم عبارت‌های $p(x) = x^2 + ax + 1$ و $q(x) = 2x^2 - x + 1$ بر $(x + 2)$ یکسان می‌باشد. مقدار a را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

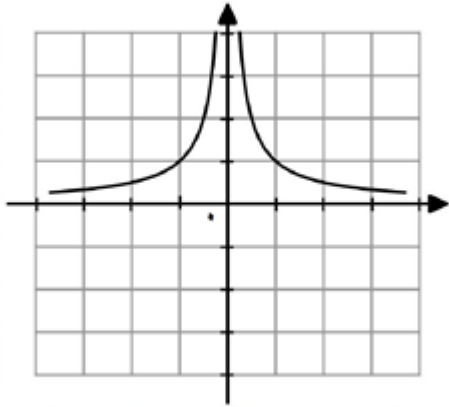
$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \begin{cases} p(-2) = -2a - 1 \\ q(-2) = 11 \end{cases} \Rightarrow a = -9$$

پاسخ: ۱



جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

- با توجه به شکل مقابل حد تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در نقطه $x = 0$ برابر است با



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ $+\infty$

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{|3x+1|}$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2 - \sqrt{x-1})(2 + \sqrt{x-1})}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{-1}{|3x+1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

مخرج در نزدیکی $-\frac{1}{3}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $-\frac{1}{3}$ برابر ۱- است. بنابراین جواب حد برابر $-\infty$ می‌شود.

ج) $\frac{3 + 0}{0 - 5} = -\frac{3}{5}$

پاسخ: ۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - a$ ، باقیمانده برابر $p(a)$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست



حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{2x - 10}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2 - \sqrt{x-1})(2 + \sqrt{x-1})}{2(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{2(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{8}$

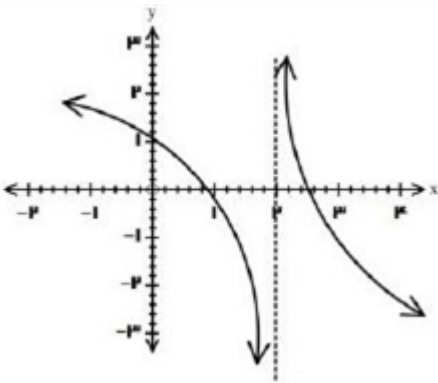
پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x-3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

در نمودار تابع $f(x)$ موارد زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = ?$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = ?$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

الف) $+\infty$

ب) $-\infty$

پاسخ: ۱

الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{[x] + 1}{x + 1}$

حدهای زیر را محاسبه کنید.

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - x^2}{3x^2 + 2}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

الف) $\frac{-1}{0^-} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$

پاسخ: ۱



الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{|2x - 1|}$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

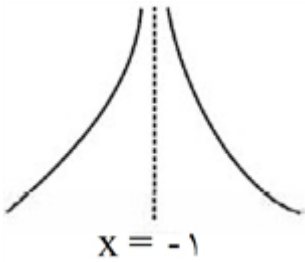
الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{-(x-3)} = -24$

پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{|2x - 1|} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{6x^3} = \frac{1}{3}$

۲۹۰ اگر رفتار تابع $f(x) = \frac{x+3}{x^2+bx+c}$ در اطراف نقطه $x = -1$ به صورت شکل زیر باشد، مقدار c و b را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = -1 \Rightarrow b = 2$
 $(-1)^2 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$

پاسخ: ۱

۲۹۱ حدود زیر را محاسبه کنید.

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 + 1}$

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\operatorname{tg} x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = -\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x+1) = \frac{\pi}{2} + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\operatorname{tg} x} = 0$

پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$



۲۹۲) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x + 1)$ برابر ۳ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow p(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -6$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow p(-1) = 3 \Rightarrow a - b = 6$$

$$a = 1, b = -5$$

پاسخ: ۱

۲۹۳) در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

حد تابع $f(x) = \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$ وقتی که $x \rightarrow -\infty$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ صفر

۲۹۴) حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x + 6}} \quad (\text{الف})$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$\left. \begin{array}{l} \text{الف} \end{array} \right) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)(x + \sqrt{x + 6})}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)(x + \sqrt{x + 6})}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{24}{5}$$

پاسخ: ۱

$$\left. \begin{array}{l} \text{ب} \end{array} \right) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x - 3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

۲۹۵) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2} \quad (\text{الف})$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$\left. \begin{array}{l} \text{الف} \end{array} \right) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x + 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x + 1)}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

پاسخ: ۱

$$\left. \begin{array}{l} \text{ب} \end{array} \right) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

۲۹۶) مقدار a, b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش‌پذیر باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow p(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow p(-1) = 0 \Rightarrow a - b = 0$$

$$a = -\frac{9}{3}, b = -\frac{9}{3}$$

پاسخ: ۱

۲۹۷) جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{x - 2}$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ ۳ (۰/۲۵)



۲۹۸ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را تعیین کنید.

حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$ برابر با $-\infty$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ درست (۰/۲۵)

۲۹۹ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2x - 5x^4$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ $-\infty$

۳۰۰ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

چند جمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دو جمله‌ای $x + 2$ بخش پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ درست

۳۰۱ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} \quad \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}} \quad \text{الف)}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$\text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{(x+1)(x-3)} = -1$$

$$\text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

۳۰۲ حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x}$$

$$\text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-5} - \frac{2}{x}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$\text{الف)} \quad \frac{[3^+] - 2}{3 - 3^+} = \frac{3 - 2}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} - 0 = 3 - 0 = 3$$

پاسخ: ۱



حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. ۳۰۳

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{(x - 4)(x + 4)} \times \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{(x - 4)(x + 4)(2 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{(x + 4)(2 + \sqrt{x})} = \frac{-1}{32} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - 1^+} = \frac{1}{-} = +\infty$$

پاسخ: ۱

در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. ۳۰۴

حد تابع $f(x) = \frac{-3x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل می‌کند برابر می‌باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاسخ: ۱ $-\infty$

حدهای زیر را محاسبه کنید. ۳۰۵

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^3 - 4x}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x - 1} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

پاسخ: ۱

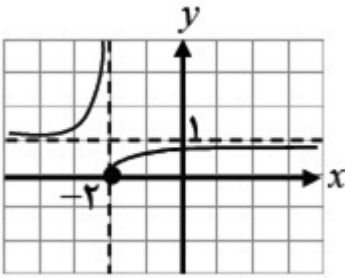


۳۰۶

با توجه به نمودار تابع f که در شکل مقابل آورده شده است، به سؤالات پاسخ دهید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

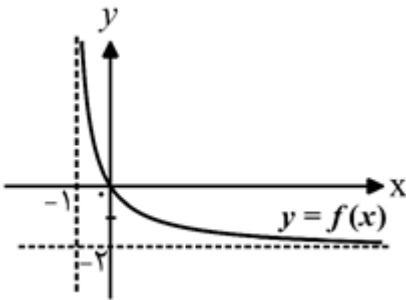
ب) ۱

پاسخ: ۱ الف) $+\infty$

۳۰۷ با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$



سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

الف) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x+25} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+25} =$

پاسخ: ۱

۳۰۸ حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} =$

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{+1}{\frac{6}{25}} = \frac{25}{6}$$

پاسخ: ۱



حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.) ۳۰۹

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} =$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\frac{-1}{0^-} = +\infty$$

پاسخ: ۱

اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $(x + 1)$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x - 2)$ را به دست آورید. ۳۱۰

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$f(-1) = 0 \Rightarrow 1 - a - 3 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$f(2) = 4 - 4 - 3 = -3$$

پاسخ: ۱

سوال ۱۶۵

فصل : مشتق

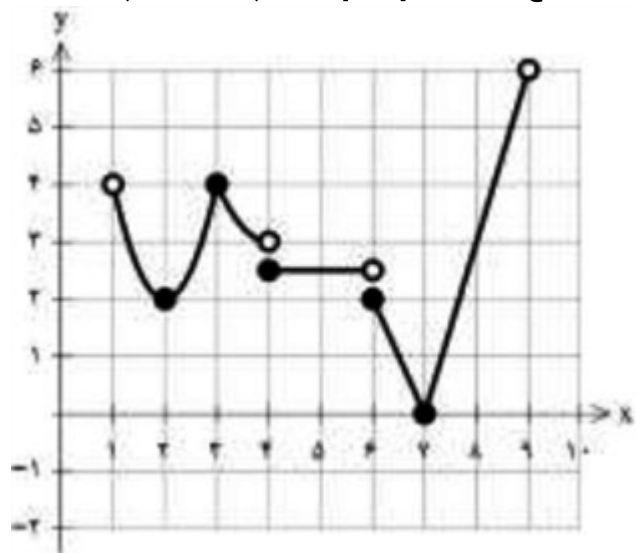
تابع $f(x) = \sqrt[3]{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی به دست آورید. ۳۱۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(25) = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$$

پاسخ: ۱

نمودار تابع f در زیر رسم شده است. ۳۱۲
(الف) تابع f در چند نقطه از دامنه‌اش مشتق‌ناپذیر است؟
(ب) آیا تابع f روی بازه $[4, 6]$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ الف) ۴ نقطه

ب) خیر - زیرا در $x = 6$ مشتق چپ (پیوستگی چپ) ندارد.



۳۱۳ اگر $g'(2) = 3$, $g(2) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = 4$ باشد، آنگاه مشتق تابع $h(x) = (f \circ g)(x)$ را در $x = 2$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = f'(5) = 4$$

$$h'(2) = g'(2)f'(g(2)) = 3 \times f'(5) = 12$$

پاسخ: ۱

۳۱۴ مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

$$g(x) = \frac{2x + 3}{5x^2 + 4}$$

$$f(x) = (x^3 + 6x)\sqrt[3]{x} \quad \text{الف}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$f'(x) = (3x^2 + 6)(\sqrt[3]{x}) + \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)(x^3 + 6x) \quad \text{الف}$$

$$g'(x) = \frac{(2)(5x^2 + 4) - (1 \cdot x)(2x + 3)}{(5x^2 + 4)^2} \quad \text{ب}$$

پاسخ: ۱

۳۱۵ مشتق تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در $x = 2$ با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ روش اول:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4$$

روش دوم:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 1 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4 + h)}{h} = 4$$

۳۱۶ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $g(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه $x = 27$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ روش اول:

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow g'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$$

روش دوم:

$$g(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow g'(27) = \frac{1}{27}$$

۳۱۷ اگر f تابعی پیوسته با دامنه اعداد حقیقی باشد و $f(3) = 8 + f(1)$ ، آنگاه آهنگ متوسط تغییر تابع f را در بازه $[1, 3]$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ روش اول:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(1) + 8 - f(1)}{2} = 4$$

روش دوم:

$$f(3) - f(1) = 8$$

$$\frac{f(3) - f(1)}{2} = 4$$

در نتیجه:



۳۱۸ به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 4x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ روش اول: $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x - 4}{x - 1} = 4$

با توجه به اینکه $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ ، نتیجه می‌شود که تابع f در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

روش دوم:

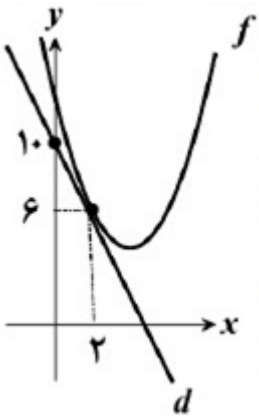
$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)^2 + 3 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h + 2 = 2$

$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4(1+h) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4h}{h} = 4$

با توجه به اینکه $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ ، نتیجه می‌شود که تابع f در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

۳۱۹ مطابق شکل روبه‌رو، خط d بر نمودار تابع f در نقطه $(2, 6)$ مماس است.

حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{3h}$ را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{3h} = \frac{-1}{3} f'(2) = \frac{-1}{3} \left(\frac{6 - 10}{2 - 0} \right) = \frac{2}{3}$

پاسخ: ۱

۳۲۰ جای خالی را با توجه به عبارت‌های داخل پرانتز، کامل کنید. [] نماد جزء صحیح است.

مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 1$ برابر است. (صفر، یک)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ صفر

۳۲۱ تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ مفروض است. در نقطه $x = a$ ، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع کمتر از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 3]$ است، محدوده a را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{-2 - 1}{3} = -1$

پاسخ: ۱ آهنگ متوسط تغییر در بازه $[0, 3]$:

آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر $f'(x) = x^2 - 4$ است.

$f'(a) < -1 \Rightarrow a^2 - 4 < -1 \Rightarrow a^2 < 3 \Rightarrow -\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$



۳۲۲ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ را در نقطه $x = 2$ با استفاده از تعریف مشتق بررسی کنید.

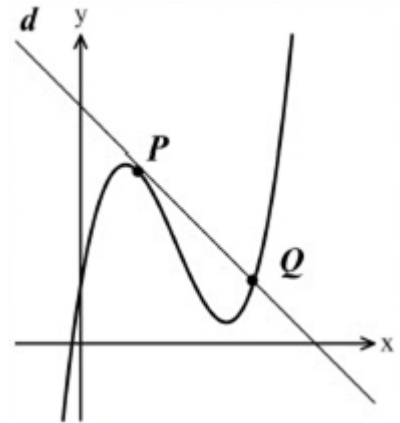
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1 \end{cases}$$

پس $f(x)$ در $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.

۳۲۳ مطابق شکل زیر خط d در نقطه $P(1, 3)$ بر نمودار تابع f مماس و در نقطه $Q(2a+1, a)$ آن را قطع می‌کند. اگر $f'(1) = -1$ ، مقدار a را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ خط d در نقطه $P(1, 3)$ بر تابع $f(x)$ مماس است، بنابراین شیب خط d برابر -1 است. روش اول: معادله خط d به صورت زیر است:

$$y - 3 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 4 \xrightarrow{Q(2a+1, a) \in d} a = -(2a+1) + 4 \Rightarrow a = 1$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a - 3}{2a + 1 - 1} = -1 \Rightarrow a = 1$$

روش دوم:

۳۲۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست

۳۲۵ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- نقطه $x = 0$ یک نقطه گوشه‌ای تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست



۳۲۶ تابع $f(x) = x^3 + x - 5$ را در نظر بگیرید.

الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0, 3]$ به دست آورید.
ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در چه نقطه‌ای از بازه $[0, 3]$ برابر ۱۳ است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

الف) $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{25 - (-5)}{3} = 10$

پاسخ: ۱

ب) $f'(x) = 3x^2 + 1 = 13 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x = 2$

۳۲۷ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (2x^6 + \sqrt{2x})^6$ ب) $g(x) = \frac{2x^3 - 1}{-x^2 + 2x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

الف) $f'(x) = 6(2x^6 + \sqrt{2x})^5 \left(12x^5 + \frac{1}{\sqrt{2x}} \right)$

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = \frac{6x^3(-x^2 + 2x) - (-2x + 2)(2x^3 - 1)}{(-x^2 + 2x)^2}$

۳۲۸ شیب خط مماس بر منحنی $f(x) = x^3 - x$ در نقطه $x = 3$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = 5$

پاسخ: ۱

۳۲۹ گنجایش ظرفی ۲۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف پس از t

ثانیه از رابطه $V = 20 \left(1 - \frac{t}{50} \right)^2$ به دست آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 50]$ می‌شود؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

یا $-\frac{4}{50} \left(1 - \frac{t}{50} \right)$ یا $20(2) \left(1 - \frac{t}{50} \right) \left(-\frac{1}{50} \right)$ آهنگ لحظه‌ای

پاسخ: ۱

آهنگ متوسط $= \frac{0 - 20}{50 - 0} = -\frac{2}{5}$

از برابری آهنگ متوسط و لحظه‌ای نتیجه می‌گیریم $t = 25$

۳۳۰ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x < 2 \\ 6x - 4 & x = 2 \\ 2\sqrt{x-1} + 6 & x > 2 \end{cases}$ را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۱ پاسخ: در $x = 2$ پیوسته است.

$f'(x) = \begin{cases} 4x & x < 2 \\ 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) & x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(2) = 1, f'_-(2) = 8$

پس در $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.



$$h(x) = \left(\frac{\sqrt{1-3x}}{7+x} \right)^6$$

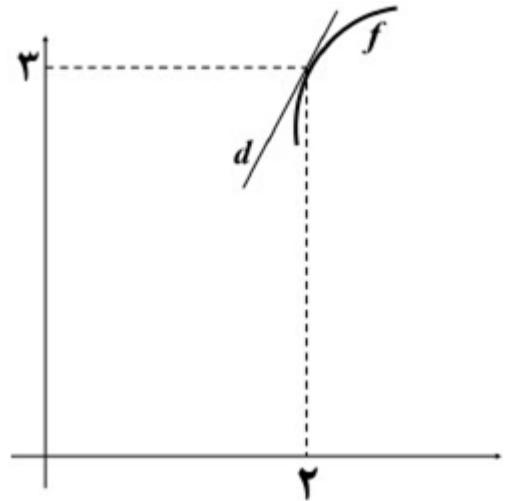
۳۳۱ مشتق تابع داده شده را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$h'(x) = 6 \left(\frac{\sqrt{1-3x}}{7+x} \right)^5 \left(\frac{\left(\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}} \right) (7+x) - (1)(\sqrt{1-3x})}{(7+x)^2} \right)$$

پاسخ: ۱

۳۳۲ با توجه به شکل، اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5f(x) - 15}{x - 2} = 10$ باشد، معادله خط d را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(f(x) - f(2))}{x - 2} = 5f'(2) = 10 \Rightarrow f'(2) = 2 \Rightarrow y = 2x - 1$$

پاسخ: ۱

۳۳۳ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
تابع $f(x) = |x - 1|$ در تمام نقاط حقیقی پیوسته است پس در R مشتق پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست

۳۳۴ تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه $[0, 25]$ را به دست آورید.
ب) آهنگ لحظه ای تغییر قد کودک در ۴۹ ماهگی را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\text{الف) } \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$$

$$\text{ب) } f'(x) = 7 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=49} f'(49) = \frac{1}{2}$$

پاسخ: ۱



۳۳۵ اگر $f(x) = |x|(x - 2)$ باشد. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع f را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|(x - 2) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x(x-2)-0}{x} = +2 \\ f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-2)-0}{x} = -2 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

چون $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ ، لذا تابع f در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

۳۳۶ اگر $f(2) = 7$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{2x - 4} = 5$ باشد، مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ را در $x = 2$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{2} f'(2) = 5 \Rightarrow f'(2) = 10$$

پاسخ: ۱

$$g'(x) = 1 \times f(x) + x \times f'(x) \Rightarrow g'(2) = 1 \times 7 + 2 \times 10 = 27$$

۳۳۷ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

اگر $1 - x^2 + 4x^3 = f(x)$ باشد، حاصل $f'(-1)$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ ۲

۳۳۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- خط $x = 2$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x - 2}$ در نقطه $(2, 0)$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست

۳۳۹ تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نظر بگیرید.

الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید.

ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازه $[0, 2]$ بزرگتر باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\text{الف) آهنگ متوسط در بازه } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 > 1 \Rightarrow x > 1$$

۳۴۰ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

$$f(x) = (x - 4)^2 + \frac{5x + 3}{\sqrt{2x - 1}}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = 2(x - 4) + \frac{5(\sqrt{2x - 1}) - \frac{2}{\sqrt{2x - 1}}(5x + 3)}{(\sqrt{2x - 1})^2}$$

پاسخ: ۱



۳۴۱ با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = 2$ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = -4$

۳۴۲ اگر نمودار تابع f از نقطه $A(2, 4)$ بگذرد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$ باشد، معادله خط مماس بر نمودار f را در نقطه A به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ فرض کنیم $y = ax + b$ ، خط مماس بر منحنی f در نقطه $(2, 4)$ واقع بر آن باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3 \Rightarrow f'(2) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$y = 3x + b \xrightarrow{(2,4)} b = -2 \Rightarrow y = 3x - 2$$

۳۴۳ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست

۳۴۴ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. t برحسب ثانویه
(الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[3, 4]$ را به دست آورید.
(ب) لحظه‌ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر $20 \frac{m}{s}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ الف) $\frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5$
ب) $h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow -10t + 40 = 20 \Rightarrow t = 2$

۳۴۵ اگر $f'(1) = 3$ ، $g'(1) = 5$ و $f(1) = 1$ مقدار مشتق $(f + g)$ در $x = 1$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ $((f + g)'(1)) = f'(1) \times (f + g)'(f(1)) = f'(1) \times (f'(1) + g'(1)) = 3 \times (3 + 5) = 24$

۳۴۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} |x| & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ f پیوسته است.

$$\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

مشتق ناپذیر



۳۴۷

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

اگر $f'(4) = 2$ و $f(4) = -1$ ، خط مماس بر نمودار f در $x = 4$ ، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض قطع می‌کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ -۹

۳۴۸

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^3 + t - 1$ است:الف) سرعت متوسط متحرک در بازه $[1, 2]$ را محاسبه کنید.ب) سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه $t = 2$ چقدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

الف) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 15$

ب) $f'(t) = 6t^2 + 1 \Rightarrow f'(2) = 25$

پاسخ: ۱

۳۴۹

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^4 - 2x)$

ب) $g(x) = \frac{3x + 1}{x^5 - x + 1}$

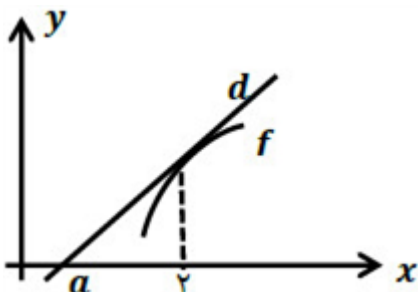
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

الف) $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x^4 - 2x) + (2\sqrt{x} + 1)(4x^3 - 2)$

ب) $g'(x) = \frac{3(x^5 - x + 1) - (5x^4 - 1)(3x + 1)}{(x^5 - x + 1)^2}$

پاسخ: ۱

۳۵۰

خط d در نقطه با طول $x = 2$ بر نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ مماس است. با توجه به شکل مقدار a (نقطه برخورد خط d با محور x ها) را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f'(2) = 2$$

$$d : (2, 3), (a, 0) : 2 = \frac{0 - 3}{a - 2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

پاسخ: ۱

۳۵۱

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x + 5}$ را وقتی متغیر از $x = -1$ به $x = 4$ تغییر می‌کند، به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

پاسخ: ۱



۳۵۲ اگر $f(x) = 2x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشند. حاصل $(f \times g)'(1) + (f + g)'(4)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$(f + g)'(4) = f'(4) + g'(4) = (4(4)^2) + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 96 + \frac{1}{4}$$

پاسخ: ۱

$$f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = (6)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(3) = 6 + \frac{3}{2}$$

$$(f + g)'(4) + (f \times g)'(1) = 96 + \frac{1}{4} + 6 + \frac{3}{2} = \frac{415}{4}$$

۳۵۳ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مشتق پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1 - 2}{x - 1} = 1$$

پاسخ: ۱

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ در نتیجه تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نیست.

۳۵۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- تابعی وجود ندارد که برای آن شرایط $f(a) = 0$ و $f'(a) = 0$ برقرار باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

۳۵۵ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 + 2t + 3$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 2]$ (بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 2]$ با هم برابرند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$f'(t) = 2t + 2$$

پاسخ: ۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{11 - 3}{2} = 4$$

$$2t + 2 = 4 \Rightarrow t = 1$$

۳۵۶ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

الف) $g(x) = \frac{(2x - 1)^4}{x^3 + 8}$

ب) $f(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

الف) $g'(x) = \frac{4 \times 2 \times (2x - 1)^3 (x^3 + 8) - 3x^2 (2x - 1)^4}{(x^3 + 8)^2}$

پاسخ: ۱

ب) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[2]{(2x + 1)^2}}$



۳۵۷ اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ آن گاه به کمک تعریف مشتق نشان دهید: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

۳۵۸ جمله‌ی زیر را کامل کنید.

اگر $f(x) = -x^3$ آن گاه $f''(1)$ برابر است با

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ -۶

۳۵۹ تابعی با ضابطه $f(x) = \frac{3x-6}{x^2+2}$ را در نظر بگیرید:

الف) آهنگ تغییر متوسط در بازه $[-2, 0]$ را به دست آورید.

ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = -1$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱

الف) $\frac{f(0) - f(-2)}{0 + 2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}$

ب) $f'(x) = \frac{-3x^2 + 12x + 6}{(x^2 + 2)^2} \Rightarrow f'(-1) = -1$

۳۶۰ با استفاده از تعریف مشتق تابع، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را در نقطه $x = 2$ بررسی نمایید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱

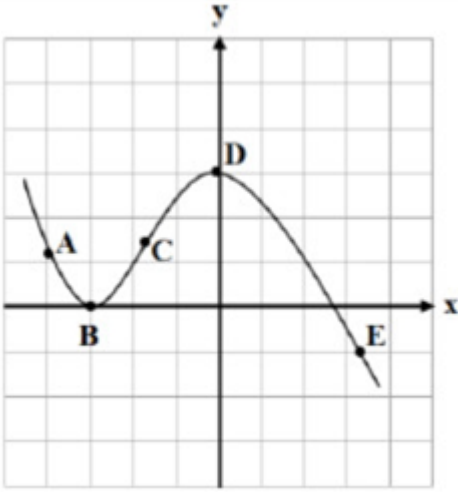
$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}} = +\infty$$

تابع در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.



با توجه به نمودار تابع مقابل:

- الف) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟
 ب) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟
 پ) در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟
 ت) شیب نقاط D و A را با هم مقایسه نمایید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

ت) $m_D > m_A$

پ) C

ب) B

الف) E ۱ پاسخ:

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است.

۳۶۲

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۱ پاسخ: نادرست

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.

۳۶۳

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۱ پاسخ: درست

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ در نقطه‌ای به طول $x = 2$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-2, 0]$ است؟

۳۶۴

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = 4x + 5 \Rightarrow f'(2) = 13$$

$$\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x = 2$ ، ۱۳ برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-2, 0]$ است.

۱ پاسخ:



۳۶۵ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

الف) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 4)$

ب) $g(x) = \frac{-4x^2 + 1}{x - 6}$

پ) $h(x) = (2x^5 - 1)^4$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

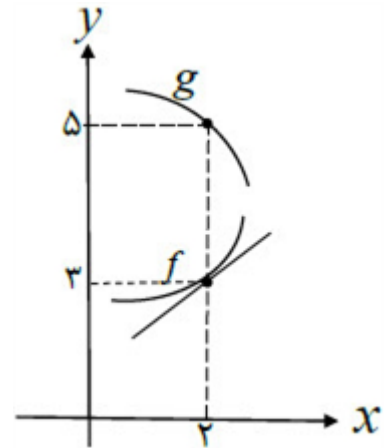
الف) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3 + 4) + 3x^2(\sqrt{3x+2})$

ب) $g'(x) = \frac{(-4x)(x-6) - (1)(-4x^2 + 1)}{(x-6)^2}$

پ) $h'(x) = 4(2x^5 - 1)^3(10x^4)$

پاسخ: ۱

۳۶۶ با توجه به نمودارهای توابع f و g حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2}$ چند برابر $f'(2)$ است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 5f'(2)$$

پاسخ: ۱

۳۶۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- نقطه $(1, 1)$ یک نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x) = |2 - x^2|$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست



۳۶۸ در تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{120}{t} + 5$ مجموع آهنگ لحظه‌ای تغییر در لحظه $t = 2$ و آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t)$ در بازه $[4, 6]$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$f'(t) = \frac{-120}{t^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-120}{4} = -30$$

پاسخ: ۱

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{\left(\frac{120}{6} + 5\right) - \left(\frac{120}{4} + 5\right)}{6 - 4} = \frac{25 - 35}{2} = -5 \\ &\Rightarrow -30 - 5 = -35 \end{aligned}$$

۳۶۹ با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید اگر $x > 0$, $f(x) = \sqrt{x}$ آنگاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) + \sqrt{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{ص ۹۳}) \end{aligned}$$

پاسخ: ۱

(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، بارم به تناسب تقسیم شود.)

۳۷۰ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & x < 1 \\ 2x^2 - 3 & x \geq 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ تابع پیوسته است.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3 + 1}{x - 1} = 4$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 4 + 1}{x - 1} = 3$$

$\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌ناپذیر است.

(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، برای محاسبه مشتق چپ و راست، بارم به تناسب تقسیم شود.)

۳۷۱ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -4t^2 + 40t$ به دست می‌آید.
الف) سرعت متوسط در بازه $[2, 4]$ را بیابید.
ب) در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$\text{الف) سرعت متوسط} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 64}{2} = 16$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } h'(t) = -8t + 40 = 16 \Rightarrow t = 3$$



الف) $f(x) = x(x-1)(x+1)$ ب) $g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

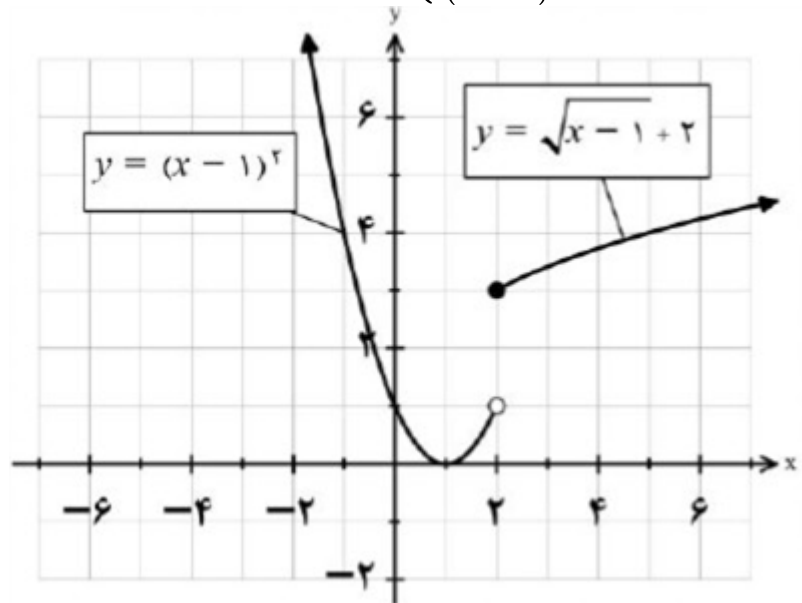
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف) $f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = 2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \left(\frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2}\right)$

۳۷۳ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + 2 & x \geq 2 \\ (x-1)^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت مقابل است:

الف) آیا تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است؟ب) آیا تابع در بازه $(-\infty, 2)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟پ) مشتق راست تابع f در نقطه $x = 2$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ الف) خیر - چون ناپیوسته است.

ب) بله، در تمام نقاط بازه $(-\infty, 2)$ مشتق پذیر است.

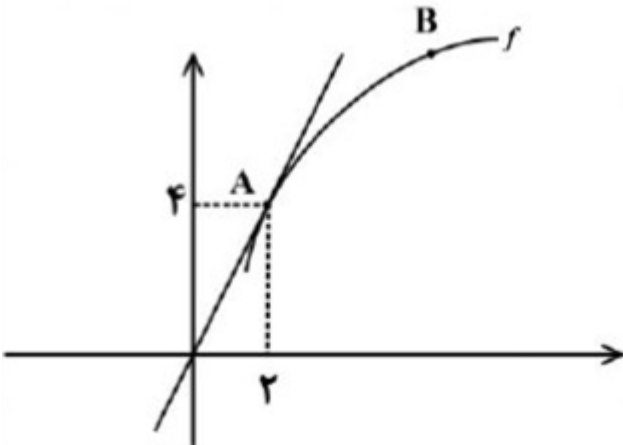
پ) $x \geq 2: f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2}$



نمودار تابع f به صورت مقابل رسم شده است. اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد:

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ را بیابید.

ب) شیب خط های مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{4}{2} = 2$

ب) $m_A > m_B$

پاسخ: ۱

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t$ گرم است. در چه لحظه ای، آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه زمانی $0 \leq t \leq 4$ می شود؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \Rightarrow \text{آهنگ متوسط} = \frac{10 - 0}{4 - 0} = \frac{5}{2}$

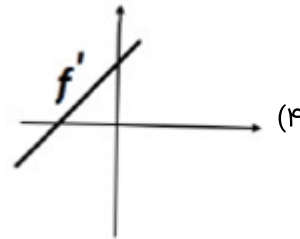
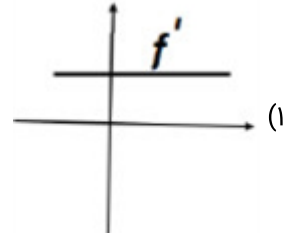
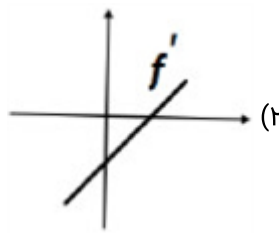
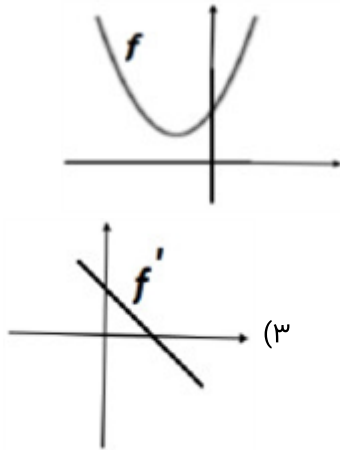
$\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1$

پاسخ: ۱



۳۷۶

با توجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور x ها را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند.

x	$x_S < 0$	
	نزولی	صعودی
f		
f'	-	+

۳۷۷ معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 0$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$f'(0) = m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty, A(0, 0)$$

پاسخ: ۱

معادله مماس قائم: $x = 0$

۳۷۸ تابع $f(x) = \sqrt[3]{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود شصت ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\text{آهنگ متوسط رشد} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}$$

پاسخ: ۱

۳۷۹ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$g(x) = (\sqrt{3x+1})(x^2 + 2x) \quad \text{ب)}$$

$$f(x) = \frac{-2x+3}{x+4} \quad \text{الف)}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\text{الف)} \quad f'(x) = \frac{-2(x+4) - 1(-2x+3)}{(x+4)^2}$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب)} \quad g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^2 + 2x) + (2x+2)(\sqrt{3x+1})$$



۳۸۰ معادله نیم مماس راست تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر منحنی بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

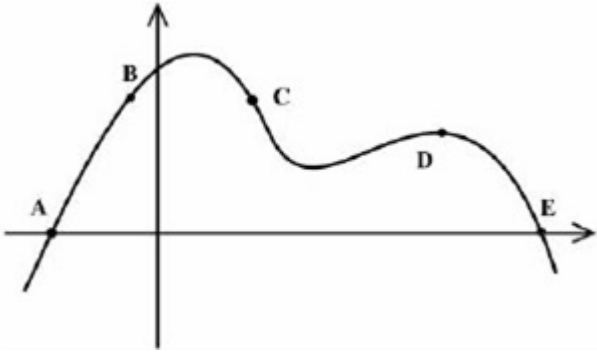
$$f'_{+}(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1)$$

پاسخ: ۱

۳۸۱ از بین نقاط مشخص شده A و B و C و D و E روی نمودار مقابل، در کدام نقطه:

الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟

ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ الف) A ب) C

۳۸۲ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $y = (x^2 - 1)[x]$ در $x = 1$ مشتق پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ نادرست

۳۸۳ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t + 3$ برحسب متر است. (t برحسب ثانیه است).

الف) سرعت متوسط تابع در بازه $[0, 3]$ را به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای تابع را در $t = 4$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\text{الف) } \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 3}{3} = 5$$

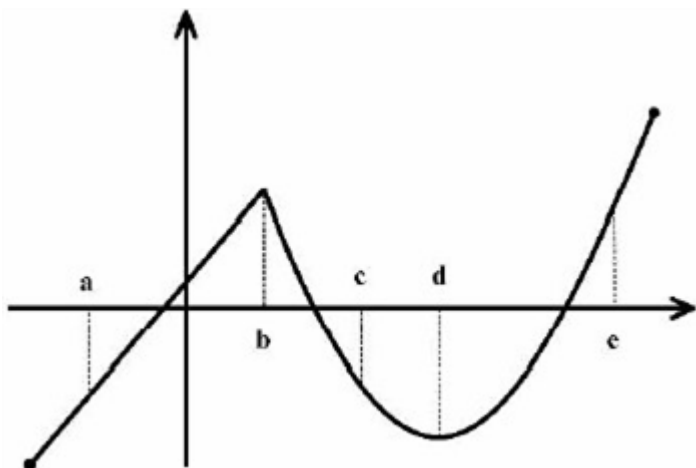
$$\text{ب) } f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow f'(4) = 15$$

پاسخ: ۱



با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل از بین نقاط مشخص شده مطلوب است طول نقطه‌ای که:

- (الف) تابع در آن مشتق پذیر نیست.
 (ب) مماس در آن موازی محور طول‌هاست
 (پ) مشتق و مقدار تابع در آن مثبت است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ (الف) b (ب) d (پ) e

مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ تابع در $x = 1$ پیوسته است.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = 2, f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1 - 2}{x - 1} = 3$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نمی‌باشد.

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ (ت بر حسب ثانیه) داده شده است. سرعت متوسط را در بازه زمانی $[0, 5]$ و سرعت لحظه‌ای را در لحظه $t = 2$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$$

$$f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(2) = 2(2) - 1 = 3$$

پاسخ: ۱

مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$f(x) = \sqrt{\frac{9x - 2}{x + 1}}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$f'(x) = \frac{\frac{9(x+1) - 1(9x-2)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}}$$

پاسخ: ۱



۳۸۸ اگر $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x < 0 \\ x^2 + 3x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته است.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= 3 \\ f'_-(0) &= a \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

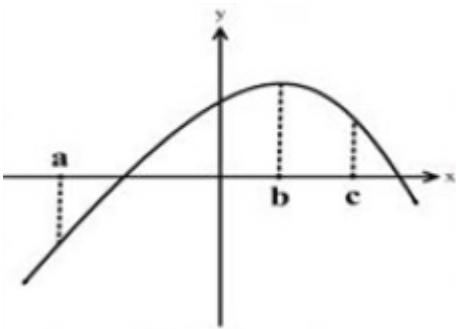
۳۸۹ اگر توابع f, g مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6$ حاصل $(fg)'(2)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 5 \times 8 + 3(-6) = 22$$

پاسخ: ۱

۳۹۰ با توجه به نمودار تابع f ، اگر شیب خط مماس در نقاط a, b, c به ترتیب با m_a, m_b, m_c نمایش داده شود. کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟



$$m_c = m_b = m_a \quad (۴) \quad m_a > m_b > m_c \quad (۳) \quad m_b > m_a > m_c \quad (۲) \quad m_c > m_b > m_a \quad (۱)$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳۹۱ اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t$ بر حسب متر باشد. در کدام لحظه، سرعت لحظه ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$f'(t) = 3t^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow t = 1$$

پاسخ: ۱

۳۹۲ برای تابع $f(x) = x^3 - 8$ در نقطه تقاطع آن با محور x ها معادله خط مماس را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$$

پاسخ: ۱

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow m = f'(2) = 12, y - 0 = 12(x - 2) \Rightarrow y = 12x - 24$$

۳۹۳ مشتق پذیری تابع $f(x) = |2x - 4|$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ تابع در این نقطه مشتق پذیر نمی باشد.

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2x-4|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2 \\ f'_-(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2x-4|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2 \end{aligned} \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2)$$



۳۹۴

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی باشد آنگاه $f'(a)$ وجود ندارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ درست

۳۹۵

دوچرخه‌سواری طبق معادله $d(t) = \frac{1}{3}t^3 + 10t$ حرکت می‌کند که در آن $0 \leq t \leq 6$ برحسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ایدر $t = 2$ چه قدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$d'(t) = t^2 + 10 \Rightarrow d'(2) = 14$$

پاسخ: ۱

۳۹۶

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (x^2 - 6)^3 \left(\frac{1}{4}x + 1 \right)$

ب) $g(x) = \sin^3(5x)$

پ) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x + 1}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

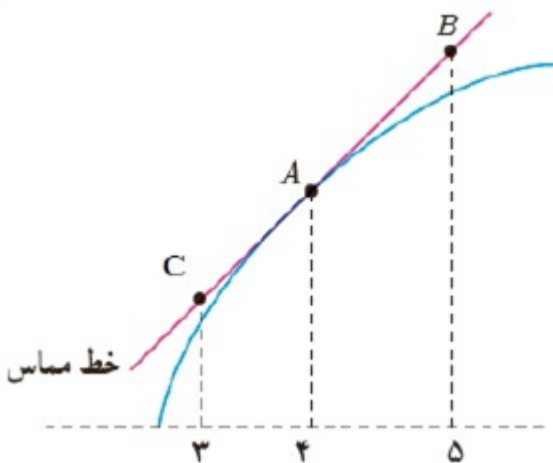
الف) $f'(x) = 3(2x)(x^2 - 6)^2 \left(\frac{1}{4}x + 1 \right) + \frac{1}{4}(x^2 - 6)^2$

ب) $g'(x) = 15 \sin^2(5x) \cos(5x)$

پ) $h'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)(x^3 - 2x + 1) - (3x^2 - 2)(\sqrt{x})}{(x^3 - 2x + 1)^2}$

پاسخ: ۱

۳۹۷

برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل مختصات نقاط B و C را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$A(4, 25) \Rightarrow 1/5 = \frac{y_B - 25}{5 - 4}$$

$$B(5, 26/5), C(3, 23/5)$$

پاسخ: ۱



۳۹۸ در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x + 2 & x \geq -1 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(-1)$ و $f'_-(-1)$ موجودند، ولی $f'(-1)$ موجود نیست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ $f'(-1)$ موجود نیست.

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x+2-1}{x+1} = 1$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2-1}{x+1} = -2 \Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$$

۳۹۹ جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- اگر $f'(5) = 2$ و $g'(5) = -1$ در این صورت $(2f - g)'(5)$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ ۵

۴۰۰ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$\Rightarrow \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4 \Rightarrow \text{سرعت متوسط}$$

پاسخ: ۱

$$\Rightarrow f'(t) = 2t - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$

۴۰۱ اگر توابع f, g مشتق‌پذیر باشند و $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مقادیر $(3f + 2g)'(1)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$3f'(1) + 2g'(1) = 9 + 10 = 19$$

پاسخ: ۱

۴۰۲ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

$$f(x) = (x^2 + 2x - 1)^5 \quad \text{الف)} \quad g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1) \quad \text{ب)}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$\text{الف)} \quad f'(x) = 5(x^2 + 2x - 1)^4 (2x + 2)$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب)} \quad g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right) (x^3 + 1) + (\sqrt{3x+2})(3x^2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases}$$

۴۰۳ مشتق‌پذیری تابع مقابل را در نقطه $x = -1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ تابع در $x = -1$ پیوسته است.

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+3-4}{x-(-1)} = -2$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+6-4}{x-(-1)} = 2 \Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$$

$f'(-1)$ موجود نیست.



۴۰۴

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt[3]{x} + 50$ متوسط قد کودکان تا شصت ماهگی را نشان می‌دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.

الف) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه‌ی زمانی $[0, 25]$ چه قدر است؟
ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چه قدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{الف) آهنگ تغییر متوسط } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) آهنگ لحظه‌ای } f'(49) = \frac{7}{\sqrt[3]{x}} = \frac{7}{\sqrt[3]{49}} = \frac{1}{2}$$

۴۰۵

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$\text{الف) } f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5 \quad \text{ب) } g(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x+2}}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{الف) } f'(x) = 5(x^2 + 2x + 1)^4 (2x + 2)$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } g'(x) = \frac{(1)(\sqrt[3]{x+2}) - \frac{2x}{\sqrt[3]{x+2}}}{(\sqrt[3]{x+2})^2}$$

$$\text{۴۰۶) اگر } f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases} \text{ نشان دهید } f'_+(0) \text{ و } f'_-(0) \text{ موجودند ولی } f'(0) \text{ موجود نیست.}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

پاسخ: ۱ تابع در $x = 0$ پیوسته است.

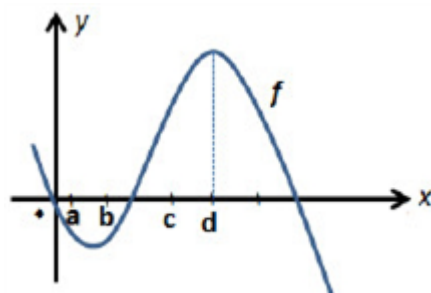
$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ پس مشتق تابع در $x = 0$ موجود نیست.

۴۰۷

با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طول‌های a, b, c, d را با مشتق‌های داده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

x	a	b	c	d
$f'(x)$	-۰/۵	۰/۵	۲	۰

پاسخ: ۱



۴۰۸ تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{240}{t}$ مفروض است. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در لحظه $t = 4$ از آهنگ متوسط تغییر تابع f از لحظه $t = 3$ تا $t = 5$ چه مقدار بیش‌تر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{-240}{t^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{-240}{16} = -15$$

پاسخ: ۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{48 - 80}{2} = -16$$

$$-15 - (-16) = 1$$

۴۰۹ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 4x(1 - |x|)$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 4x^2 & x \geq 0 \\ 4x + 4x^2 & x < 0 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x - 4x^2}{x} = 4$$

تابع مشتق‌پذیر است $\Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0)$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x + 4x^2}{x} = 4$$

۴۱۰ جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- شیب خط مماس بر منحنی $y = 1 - 5x^2 - 2x$ در نقطه‌ای به طول ۲- واقع بر آن برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ ۱۸

۴۱۱ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ نادرست

۴۱۲ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنید ارتفاع این

جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. مطلوب است:

الف) سرعت متوسط در بازه $[1, 2]$ ب) سرعت لحظه‌ای در زمان $t = 3$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\text{الف) سرعت متوسط} = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) سرعت لحظه‌ای} \Rightarrow h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow h'(3) = 10$$



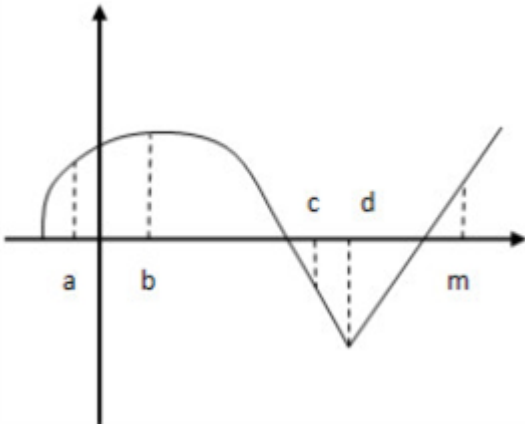
۴۱۳

با توجه به نمودار f به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید.

ب) طول نقطه «گوشه‌ای» را بنویسید.

پ) طول نقطه‌ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، را بنویسید.



سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

الف) $x = b$

ب) $x = d$

پ) $x = c$

پاسخ: ۱

۴۱۴) معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را در نقطه $A(1, f(1))$ به دست آورید.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$f(1) = -1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(1) = 1 \Rightarrow y = x - 2$$

پاسخ: ۱

۴۱۵) جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

- اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a است.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ پیوسته

۴۱۶) جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین

در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید:الف) سرعت متوسط جسم را در بازه $[5, 8]$ به دست آورید.ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم $\frac{35}{s} m$ است.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

الف)
$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - (75)}{8 - 5} = -25$$

ب)
$$h'(t) = -10t + 40 = 35 \Rightarrow t = 0.5$$

پاسخ: ۱



۴۱۷ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

ب) $g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$

الف) $f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$

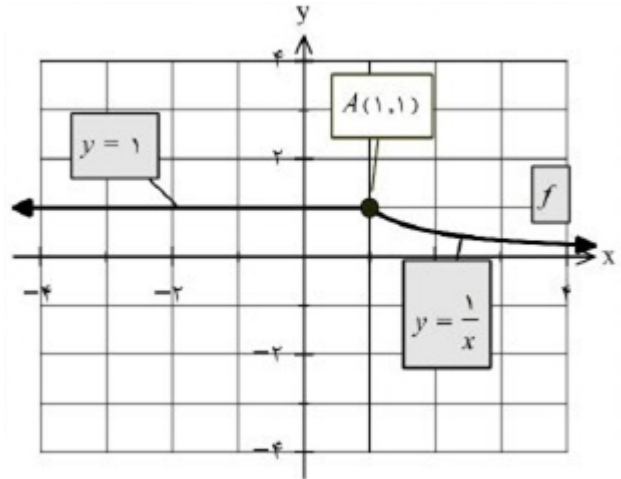
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

الف) $f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = (6x)(2x - 5)^3 + (3)(2)(2x - 5)^2(3x^2 - 4)$

۴۱۸ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه‌ی A ، نشان دهید که تابع f در نقطه A مشتق‌پذیر نیست.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = -1$$

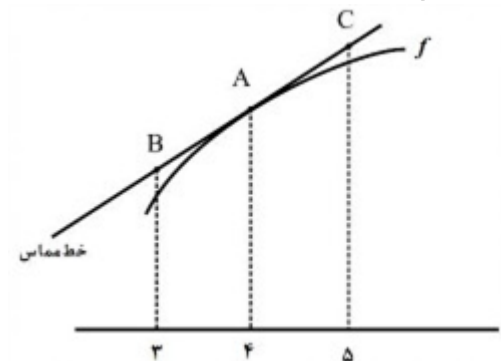
$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = 1$$

$$\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$$

پاسخ: ۱

$f'(1)$ موجود نیست.

۴۱۹ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 1/5 \Rightarrow B(3, 22/5)$$

$$\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 1/5 \Rightarrow C(5, 25/5)$$

پاسخ: ۱



۴۲۰

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
اگر $h(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ باشد، آنگاه $h'(1)$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ ۴۰

۴۲۱

درست یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
اگر خط $x = a$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $(a, f(a))$ باشد آنگاه $f'(a)$ موجود است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست

۴۲۲

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است.
در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

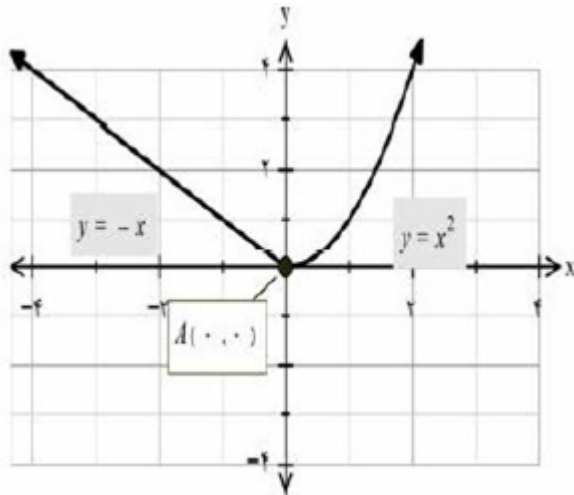
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4 \Rightarrow f'(t) = 2t - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$

پاسخ: ۱

۴۲۳

با محاسبه مشتق چپ و راست تابع داده شده در نقطه A، نشان دهید این تابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیست.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

$$\Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

پاسخ: ۱

$f'(0)$ موجود نیست.

۴۲۴

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = \left(\frac{x^2}{3x-1} \right)^5$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2+1)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

الف) $f'(x) = 5 \left(\frac{x^2}{3x-1} \right)^4 \left(\frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2} \right)$

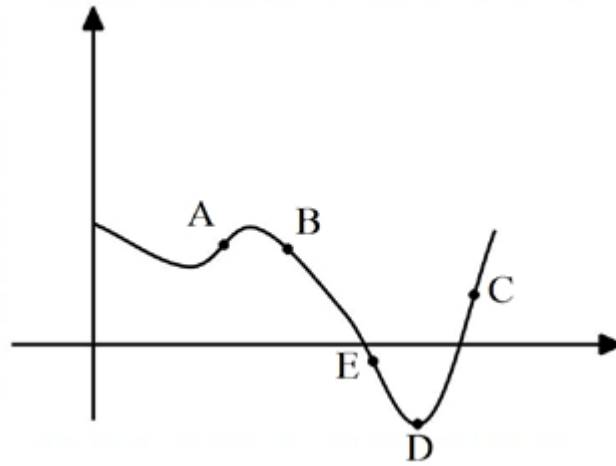
ب) $g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right) (x^2+1) + 3x^2(\sqrt{3x+2})$

پاسخ: ۱



نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یک نقطه اضافی است)

شیب	نقطه
-۳	
-۱	
۰	
۱	



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

نقطه	A	D	B	E
شیب	۱	۰	-۱	-۳

پاسخ: ۱

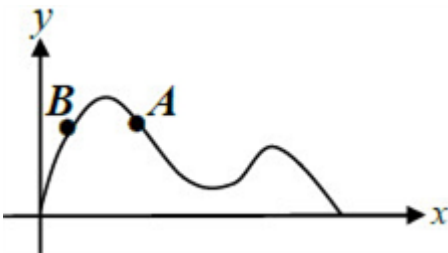
۴۲۶ جسمی از سطح زمین به طور عمودی پرتاب شده است، که معادله ارتفاع آن از سطح زمین به صورت $f(t) = -2t^2 + 10t$ می‌باشد. سرعت لحظه‌ای این جسم را در $t = 2$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$f'(t) = -4t + 10 \Rightarrow f'(2) = -8 + 10 = 2$$

پاسخ: ۱

۴۲۷ در نمودار $y = f(x)$ شیب نمودار در نقاط A, B و شیب خط AB را، از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$m_A < m_{AB} = 0 < m_B \text{ (ص ۸۲)}$$

پاسخ: ۱

۴۲۸ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$g(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \text{ (ب)}$$

$$f(x) = (4x^2 - 7)(2x - 1)^4 \text{ (الف)}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\text{الف)} f'(x) = (12x^2)(2x - 1)^4 + 4(2x - 1)^3(2)(4x^2 - 7)$$

$$\text{ب)} g'(x) = \frac{-\cos x(\cos x) - (-\sin x)(1 - \sin x)}{\cos^2 x}$$

پاسخ: ۱



۴۲۹ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

تابع پیوسته است. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2 = f(1)$

پاسخ: ۱

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = 2, f'_{-}(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = 2$$

$\Rightarrow f'_{+}(1) = f'_{-}(1) = 2$. تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است.

۴۳۰ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ پیوسته

۴۳۱ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید.

سرعت لحظه‌ای در $t = 9$ برای متحرکی با معادله حرکت $f(t) = \sqrt{t}$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ $\frac{1}{6}$

۴۳۲ درستی یا نادرستی عبارت زیر را بنویسید.

خط $x = 1$ مماس قائم منحنی $f(x) = \sqrt{x}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

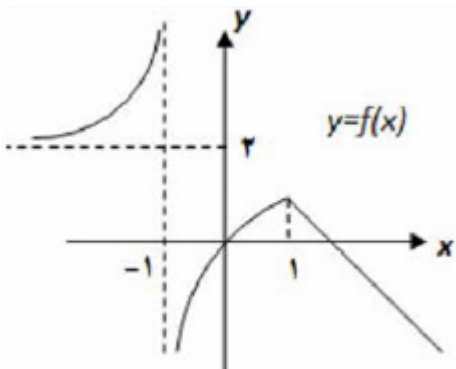
پاسخ: ۱ نادرست

۴۳۳ با توجه به نمودار $y = f(x)$.

الف) حدود خواسته شده را بنویسید.

$$\begin{aligned} ۱) & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \\ ۲) & \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) \end{aligned}$$

ب) تابع $y = f(x)$ در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده، مشتق‌پذیر نیست؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ الف) ۱) ۲ ۲) $-\infty$

ب) تابع در $x = 1, x = -1$ مشتق‌پذیر نیست.



۴۳۴ خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله‌ی $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ بر حسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چه قدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$d'(t) = -10t + 20 \Rightarrow d'(2) = 0$$

پاسخ: ۱

۴۳۵ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}} \quad \text{الف} \quad g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(x^2+5x) \quad \text{ب}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$\text{الف} \quad f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}(3x+1)}{(\sqrt{x})^2}$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب} \quad g'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)(x^2+5x) + \left(\frac{1}{x}\right)(2x+5) = \frac{5}{x}$$

۴۳۶ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ داده شده است:

الف) نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

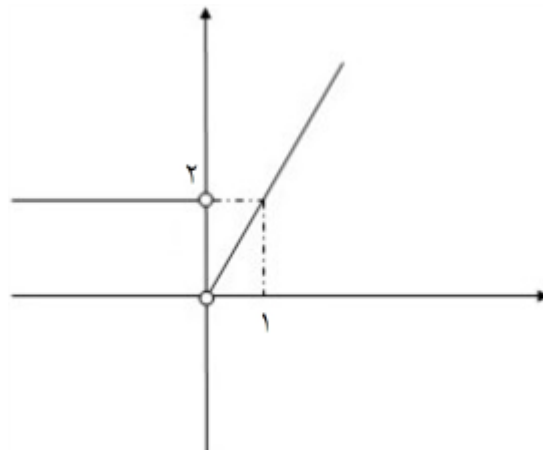
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \quad \text{الف}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 0}{x - 0} = 2$$

$$f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

مشتق راست و چپ در $x = 0$ برابر نیست در نتیجه تابع در $x = 0$ مشتق ناپذیر است.

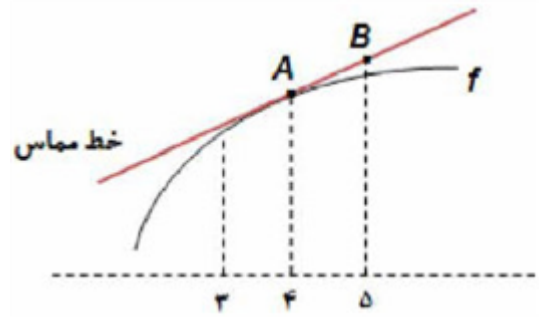
$$\text{ب} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$



پ)



۴۳۷ برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(4) = \frac{3}{4}$ و $f(4) = 27$. با توجه به شکل، مختصات نقطه B را بیابید.



پاسخ: ۱

$$A(4, 27)$$

$$\frac{3}{4} = \frac{y_B - 27}{5 - 4} \Rightarrow B(5, 27/75)$$

۴۳۸ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

پس تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد. $f'_-(0) \neq f'_+(0)$

۴۳۹ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

الف) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2+1)$

ب) $g(x) = (x^2+3x+1)^5$

پ) $h(x) = \frac{x^2-5x+7}{-2x+9}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

الف) $f'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right) (x^2+1) + (3x^2)(\sqrt{3x+2})$

ب) $g'(x) = 5(2x+3)(x^2+3x+1)^4$

پ) $h'(x) = \frac{(2x-5)(-2x+9) - (-2)(x^2-5x+7)}{(-2x+9)^2}$

پاسخ: ۱

۴۴۰ اگر $f(x) = x^2 - 3x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $f'(1)$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$$



۴۴۱

در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.
تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. خط $x = 0$ را منحنی می نامیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ مماس قائم

۴۴۲

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آن گاه f مشتق پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست

۴۴۳

در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید.
اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ ، در این صورت $(f + g)'(1)$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ ۱۹

۴۴۴

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست

۴۴۵

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد آن گاه f مشتق پذیر هم نیست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

۴۴۶

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.
(الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $1 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟
(ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 4$ چه قدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

(الف) $\Delta m = 130 - 3 = 127$

پاسخ: ۱

$$(ب) m'(4) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \xrightarrow{t=4} \frac{1}{4} + 96$$

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

۴۴۷

$$(الف) f(x) = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5} \right)^8 \quad (ب) g(x) = \left(\frac{1}{x} \right) (\sqrt{3x+2})$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$(الف) f'(x) = 8 \left(\frac{-3x+1}{x^2+5} \right)^7 \times \left(\frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x+1)}{(x^2+5)^2} \right)$$

پاسخ: ۱

$$(ب) g'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \right) (\sqrt{3x+2}) + \left(\frac{1}{x} \right) \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right)$$



به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در نقطه $x = -2$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ تابع در $x = -2$ پیوسته است.

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} = 4$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} = -4$$

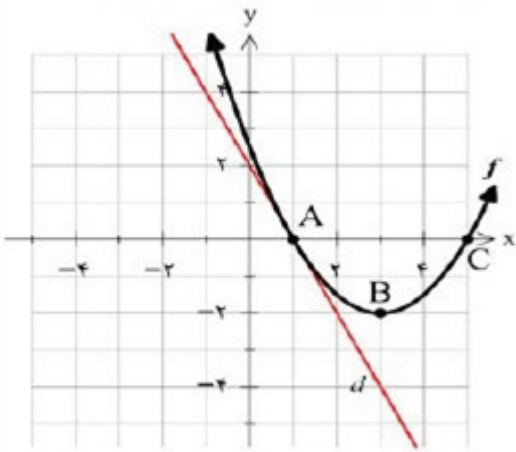
$$\Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2)$$

$f'(-2)$ موجود نیست.

در نمودار مقابل خط d در نقطه $x = 1$ بر نمودار f مماس شده است:

الف) مشتق تابع f را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

الف) $f'(1) = \frac{2 - 0}{0 - 1} = -2$

ب) $m_B < m_C$

پاسخ: ۱

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = -2$$

پس تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد $f'_-(1) \neq f'_+(1)$

پاسخ: ۱

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$f'(x) = -2x + 10, f'(2) = 6, f(2) = 16$$

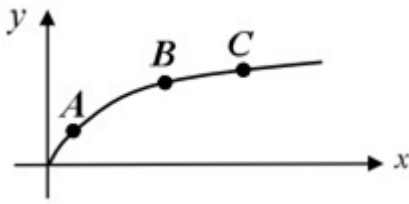
$$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$$

پاسخ: ۱



۴۵۲

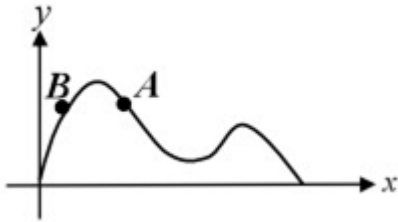
جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

با توجه به شکل روبه‌رو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه بزرگ‌تر از شیب خط مماس بر منحنی در نقطه B است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ $A (0/25)$

۴۵۳ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را تعیین کنید.

در شکل روبه‌رو، شیب خطوط مماس در نقاط A و B مثبت است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ نادرست $(0/25)$

۴۵۴ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

اگر $f'(2) = -1$ و $g'(2) = 3$ ، در این صورت $(2f + 3g)'(2)$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ ۷

۴۵۵ تابع $f(x) = 50\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه‌ی زمانی $[0, 25]$ چه قدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = 1/4$$

پاسخ: ۱

۴۵۶ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$$\Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

پاسخ: ۱

 $f'(0)$ موجود نیست.

۴۵۷

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$g(x) = \frac{x^9 - 2}{\sqrt{x}} \quad \text{ب)}$$

$$f(x) = (x^2 + 1)^3 (5x - 1) \quad \text{الف)}$$

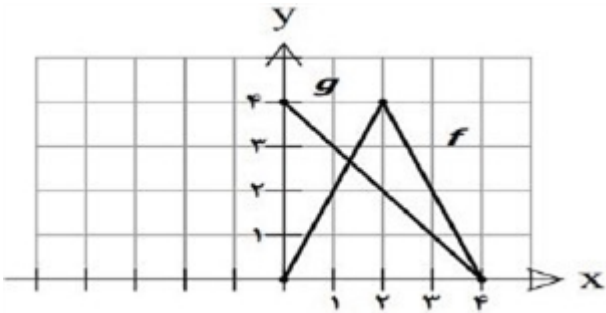
پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$\text{الف)} \quad f'(x) = 3(2x)(x^2 + 1)^2 (5x - 1) + 5(x^2 + 1)^3$$

$$\text{ب)} \quad g'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x^9 - 2)}{(\sqrt{x})^2}$$

۴۵۸ نمودار تابع f, g را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(1)$ را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{g^2(1)} = \frac{2 \times 3 - (2)(-1)}{9} = \frac{8}{9}$$

پاسخ: ۱

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 3x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

۴۵۹ مشتق‌پذیری تابع مقابل را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1} = 2$$

پاسخ: ۱

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x + 1 - 4}{x - 1} = 3 \Rightarrow f'_-(1) \neq f'_+(1)$$

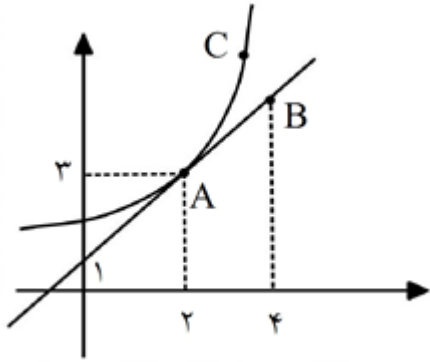
بنابراین تابع f را در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

۴۶۰

در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)$ و خط مماس بر منحنی آن در نقطه‌ی $x = ۲$ داده شده است:

الف) مشتق تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x = ۲$ را بیابید.

ب) معادله خط مماس بر نمودار تابع در نقطه A را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

$$f'(2) = \frac{3-1}{2-0} = 1$$

پاسخ: ۱

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$$

پاسخ: ۱

مشتق تابع $y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x} - 1)^4$ را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$y' = \frac{-1}{x^2} \times (2\sqrt{x} - 1)^4 + 4(2\sqrt{x} - 1)^3 \times \left(\frac{2}{2\sqrt{x}} - 0 \right) \times \frac{1}{x}$$

پاسخ: ۱

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$f'_+(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'_+(1) = 3$$

$$f'_-(x) = 3 \Rightarrow f'_-(1) = 3$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) = 3$$

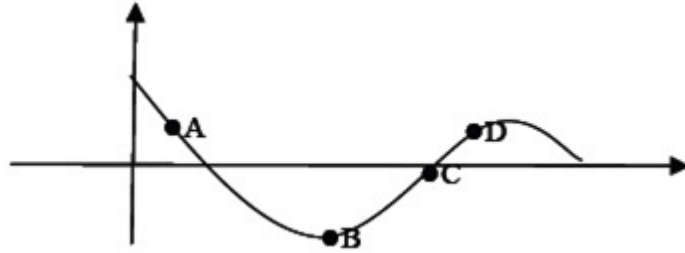
پاسخ: ۱

در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است.



نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲
نقطه				



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲
نقطه	C	B	D	A

پاسخ: ۱

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ در نقطه $x = 2$ چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = -1$ است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاسخ: ۱ ۱۳ برابر، زیرا:

$$f'(x) = 4x + 5 \Rightarrow \begin{aligned} f'(-1) &= 1 \\ f'(2) &= 13 \end{aligned}$$

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4 \\ f'_-(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = -4 \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2) \end{aligned}$$

تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

با توجه به نمودار داده شده، گزینه مناسب را انتخاب کنید.

(i) در کدام نقطه مماس افقی بر نمودار رسم می‌شود؟

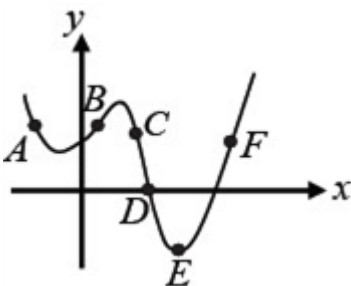
الف) B ب) E

(ii) شیب خط مماس در نقطه F چه علامتی دارد؟

الف) مثبت ب) منفی

(iii) شیب خط مماس بر نمودار، در نقطه D نسبت به نقطه B چگونه است؟

الف) بیش‌تر ب) کم‌تر



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

(iii) ب (کم‌تر)

(ii) الف (مثبت)

پاسخ: ۱ (i) ب (E)



۴۶۸

معادله ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ ، برحسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0, 4]$ با هم برابرند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{28 - 0}{4} = 7 \Rightarrow f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow 4t - 1 = 7 \Rightarrow t = 2$$

پاسخ: ۱

۴۶۹

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = (x^4 - 3x)^5$

ب) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

الف) $f'(x) = 5(x^4 - 3x)^4 (4x^3 - 3)$

ب) $g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) - (-1)\sqrt{x}}{(1-x)^2}$

پاسخ: ۱

۴۷۰

تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

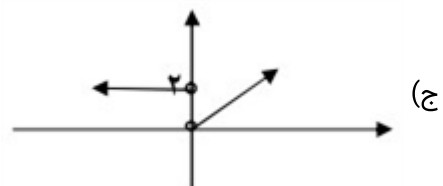
ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ الف) در $x = 0$ گوشه‌ای و مشتق ناپذیر است. $0/5$ (در صورتی که با مقدار مشتق چپ و راست بررسی کند نمره تعلق می‌گیرد)

ب) $f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$ $0/5$



۴۷۱

مشتق تابع $f(x) = x^3 - 2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x = -1$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3$$

پاسخ: ۱



۴۷۲ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را در بازه $[0, 2]$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را در $x = 1$ محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

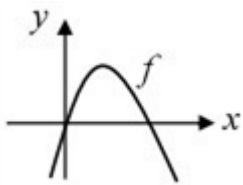
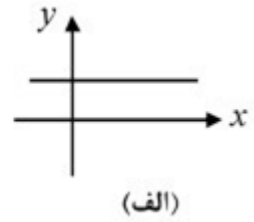
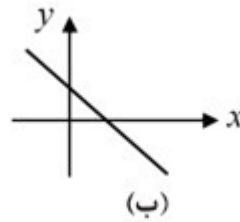
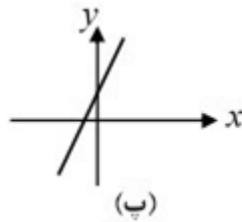
$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2 \quad (0/25)$$

پاسخ: ۱

$$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(1) = 0 \quad (0/25) \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای}$$

۴۷۳ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو آمده است.

با بیان دلیل، مشخص کنید کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار مشتق تابع f است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

۱ پاسخ: نمودار (ب) $(0/25)$. سهمی نمودار داده شده ماکزیمم دارد. پس ضریب x^2 منفی است. لذا در مشتق تابع ضریب x منفی خواهد بود. در نتیجه نمودار مشتق، خطی با شیب منفی است. $(0/25)$

۴۷۴ قضیه: ثابت کنید اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه تابع f در $x = a$ پیوسته است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

۱ پاسخ: کافی است نشان دهیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$\underbrace{\lim_{x \rightarrow a} (x - a)}_{(0/25)} \quad \underbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{(0/25)}$

$$= 0 \times f'(a) = 0 \quad (0/25) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0 \quad (0/25) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (0/25)$$



۴۷۵ نشان دهید نقطه‌ای به طول $x = -1$ ، نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x) = |x^2 + x|$ می‌باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ تابع f در $x = -1$ پیوسته است. ($0/25$)

$$f'_{+}(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{|x^2 + x|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-x(x+1)(0/25)}{x+1} = 1(0/25)$$

$$f'_{-}(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)(0/25)}{x+1} = -1(0/25)$$

مشتق‌های راست و چپ تابع هر دو متناهی ولی نابرابرند. ($0/25$) پس $x = -1$ نقطه گوشه‌ای تابع است.

سوال ۷۶

فصل ۵: کاربرد مشتق

۴۷۶ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

نقطه به طول c از دامنه تابع f که در آن $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد را یک نقطه می‌نامیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ بحرانی

۴۷۷ جای خالی را با توجه به عبارت‌های داخل پرانتز، کامل کنید. ($]$ نماد جزء صحیح است.)

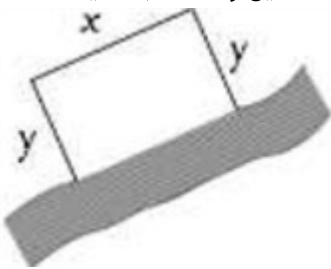
نقطه‌ای به طول $x = 2$ ، نقطه تابع $f(x) = [x]$ است. (ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ ماکزیمم نسبی

۴۷۸ می‌خواهیم مطابق شکل مقابل، سه ضلع یک محوطه به شکل مستطیل را در کنار رودخانه نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰

متر نرده را در اختیار داشته باشیم، به کمک جدول تغییرات، بیشترین مساحت ممکن برای این مستطیل را محاسبه کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$x + 2y = 100 \Rightarrow x = 100 - 2y$$

$$S = x \cdot y = (100 - 2y)y = 100y - 2y^2$$

$$S'(y) = 100 - 4y = 0 \Rightarrow y = 25$$

$$S_{\max} = 50 \times 25 = 1250$$

y	0	25	50
S'	+		-
S	0	↗	↘

پاسخ: ۱



۴۷۹

تابع $f(x) = x^2 - 12x + 4$ را در نظر بگیرید.
 الف) بزرگ‌ترین بازه از x که تابع f در آن نزولی اکید است را به دست آورید.
 ب) طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f را مشخص کنید.

پاسخ: ۱ الف) $[-2, 2]$ $f'(x) = 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 6$

x	-6	6
f'	+	-
f		

ب) طول ماکزیمم نسبی: $x = -6$

۴۸۰

مقادیر اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = \frac{-2}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1$ را در بازهٔ $[-3, 2]$ به دست آورید.

پاسخ: ۱

در نتیجه نقاط $x = -2$ و $x = 1$ نقاط بحرانی تابع هستند.

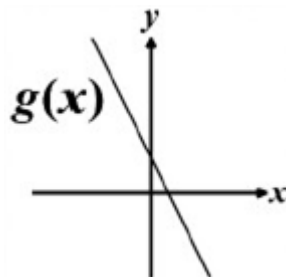
$$f(1) = \frac{10}{3}, f(-2) = \frac{-17}{3}$$

$$f(-3) = -2, f(2) = -\frac{1}{3}$$

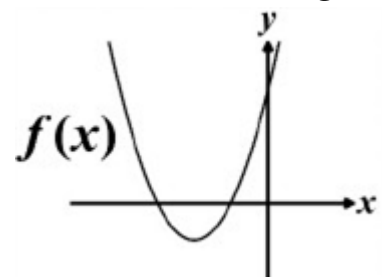
مقدار ماکزیمم مطلق تابع f برابر $y = \frac{10}{3}$ و مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر $y = -\frac{17}{3}$ است.

۴۸۱

نمودار توابع f و g به صورت زیر است.

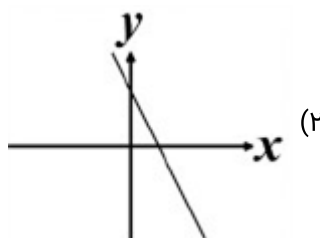


(ب)

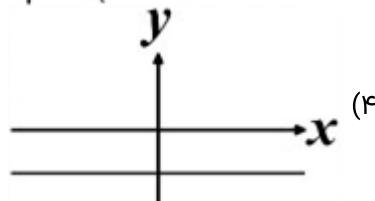


(الف)

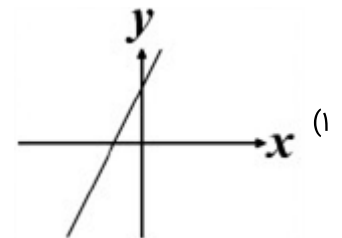
نمودار مشتق هر کدام از توابع f و g را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید. سپس شمارهٔ مربوط به آن را بنویسید. (دو نمودار اضافه است.)



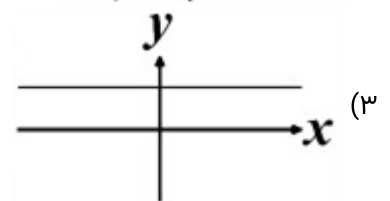
(۲)



(۴)



(۱)



(۳)

ب) نمودار شماره ۴

الف) نمودار شماره ۱

۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$f'(x) = -2x^2 - 2x + 4 \xrightarrow{f'=0} x = -2, x = 1$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴



۴۸۲ جای خالی را با توجه به عبارتهای داخل پرانتز، کامل کنید. ([] نماد جزء صحیح است).

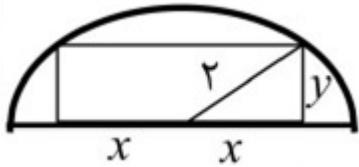
مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 1$ برابر است. (صفر، یک)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ صفر

۴۸۳ یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۲ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳



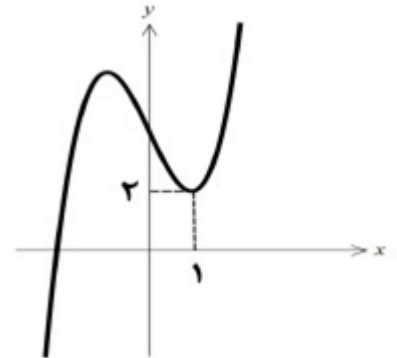
پاسخ: ۱ با توجه به شکل $x^2 + y^2 = 4$ ، پس $y = \sqrt{4 - x^2}$ در نتیجه:

$$S = xy \xrightarrow{y=\sqrt{4-x^2}} S(x) = x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow S'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}(x)$$

$$\xrightarrow{S'(x)=0} \frac{2(4-x^2) - 2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow -4x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow 2x = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2}$$

۴۸۴ نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ به صورت زیر است. مقدار a و b را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$f'(1) = 0 \xrightarrow{f'(x)=3x^2+a} 3(1)^2 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

پاسخ: ۱

$$f(1) = 2 \Rightarrow (1)^3 + a(1) + b = 2 \xrightarrow{a=-3} 1 - 3 + b = 2 \Rightarrow b = 4$$

۴۸۵ طول مستطیلی را بیابید که مساحت آن ۱۶ سانتی متر مربع و محیط آن کمترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$S = ab = 16 \Rightarrow b = \frac{16}{a}$$

پاسخ: ۱

$$p = 2(a + b) = 2\left(a + \frac{16}{a}\right) = 2a + \frac{32}{a}$$

$$p' = 2 - \frac{32}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{32}{a^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

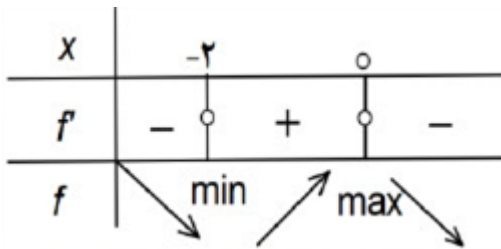


با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$ طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع را در صورت وجود بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = -3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(-3x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

پاسخ: ۱



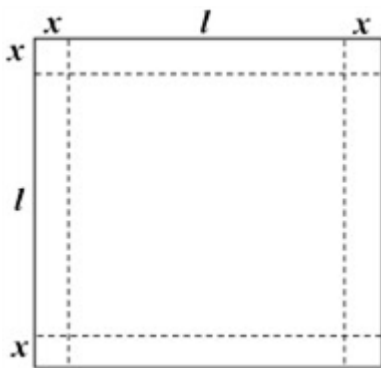
$\Rightarrow$ طول نقطه ماکسیمم نسبی $x = 0$
طول نقطه مینیمم نسبی $x = -2$

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر نقطه اکسترمم مطلق، اکسترمم نسبی نیز هست.

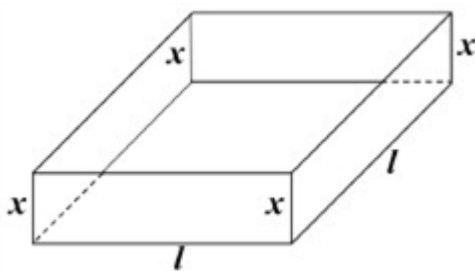
پاسخ: ۱ نادرست

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌های مشخص شده در شکل، یک جعبه در باز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳



$$v = xl^2$$

$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x \Rightarrow v = x(30 - 2x)^2$$

$$4x^3 - 120x^2 + 900x, x \in [0, 15]$$

پاسخ: ۱

$$v'(x) = (30 - 2x)^2 + 2(-2)(30 - 2x)x = 0 \text{ یا } v'(x) = 12x^2 - 240x + 900 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ ق ق} \\ x = 15 \text{ غ ق} \end{cases}$$

x	۰	۵	۱۵
v'	+	۰	-
v	↗	↘	↘

بیشترین حجم برای $x = 5$ به دست می‌آید.

با رسم جدول تغییرات تابع، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 15x + 4$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = 2x^2 - x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

x	$-\frac{5}{2}$	3
f'		
f	$\nearrow$	$\searrow$
	max	min

نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را در بازه $[-1, 3]$ در صورت وجود بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \xrightarrow{f'=0} 3x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \notin [-1, 3] \end{cases}$$

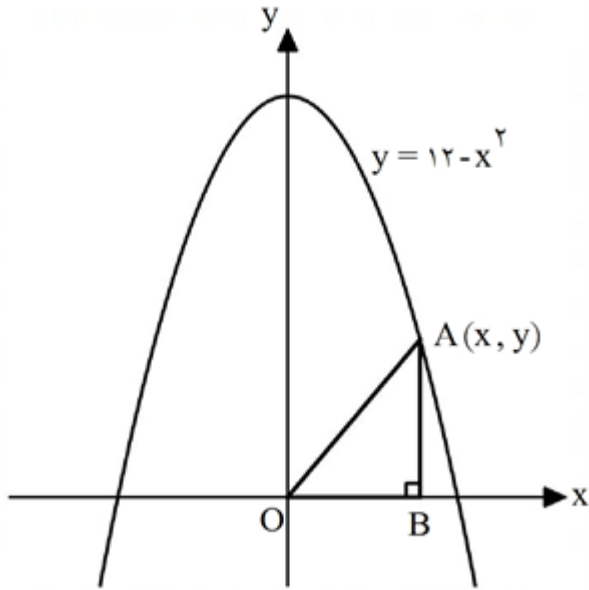
پاسخ: ۱

x	-1	0	3
f'	+	0	-
f	-7	0	-27

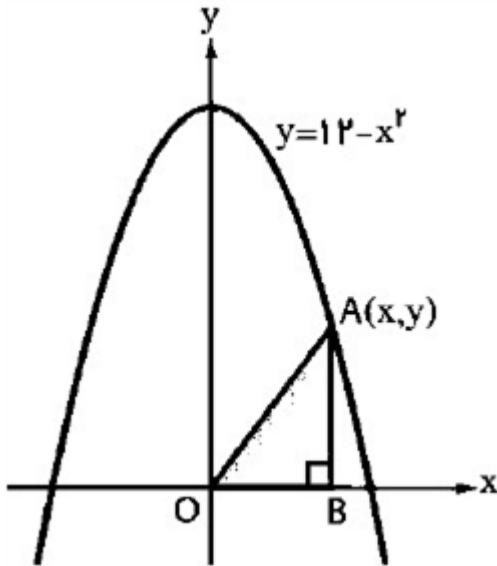
$(0, 0)$ نقطه ماکزیمم نسبی $(0, 0)$ نقطه ماکزیمم مطلق و $(3, -27)$ نقطه ماکزیمم مطلق این تابع در بازه $[-1, 3]$ است.



مطابق شکل مقابل، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = ۱۲ - x^۲$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳



$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(12 - x^2) = 6x - \frac{1}{2}x^3$$

$$\Rightarrow S'(x) = 6 - \frac{3}{2}x^2$$

$$6 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = ۲$$

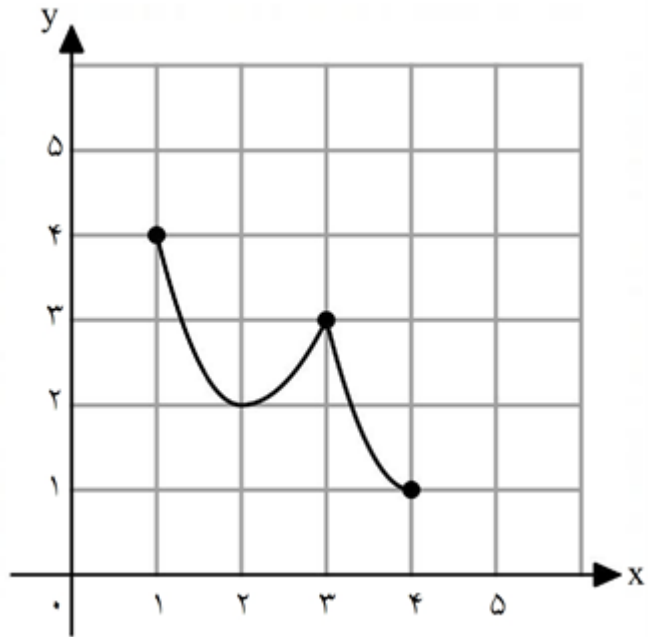
$$\Rightarrow y = 12 - ۴ = ۸$$

پاسخ: ۱

x	۰	۲	$\sqrt{۱۲}$
$S'(x)$	+	-	
$S(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	
		۸	



در نمودار زیر، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید.



پاسخ: ۱

۲ = طول مینیمم نسبی

۴ = طول مینیمم مطلق

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۳ = طول ماکزیمم نسبی

۱ = طول ماکزیمم مطلق

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

پاسخ: ۱ درست

مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 12x$ در بازه $[-1, 3]$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \times$$

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 11 \\ f(2) &= -16 \\ f(3) &= -9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مقدار ماکزیمم} = 11$$

پاسخ: ۱

می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و دربار بسازیم که گنجایش آن دقیقاً ۹۰۰ سانتی‌متر مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \simeq 3$)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$h = \frac{300}{r^2}$$

$$S = \frac{1800}{r} + 3r^2$$

$$S' = \frac{-1800}{r^2} + 6r = 0$$

$$r = \sqrt{300} \Rightarrow h = \sqrt{300}$$

پاسخ: ۱



۴۹۶ با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 27x + 1$ مشخص کنید تابع در کدام بازه‌ها اکیداً صعودی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

x		-3		3	
f'(x)	+	○	-	○	+

$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

پاسخ: ۱

اکیداً صعودی $(-\infty, -3], [3, +\infty)$

۴۹۷ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را روی بازه $[-2, 3]$ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \notin [-2, 3] \text{ غ ق ق}$$

$$f(-2) = -32, f(0) = 0, f(3) = -27$$

$$\text{ماکزیمم مطلق} = 0 \quad \text{مینیمم مطلق} = -32$$

پاسخ: ۱

۴۹۸ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۸ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$x - y = 8 \Rightarrow x = 8 + y$$

$$s = xy = (8 + y)y = y^2 + 8y$$

$$s' = 2y + 8 = 0 \quad \begin{cases} y = -4 \\ x = 4 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۴۹۹ نقاط بحرانی تابع زیر را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'	-	+	-	
f		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		-16	11	
		Min	Max	

۵۰۰ اکستریم‌های مطلق تابع $f(x) = x^5 - 5x$ را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$f(1) = -4 \text{ مینیمم مطلق}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 22 \text{ ماکزیمم مطلق}$$

پاسخ: ۱



۵۰۱ پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن داریم به طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط این پنجره ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$2h + 2r + \pi r = 6 \Rightarrow h = \frac{6 - 2r - \pi r}{2}$$

پاسخ: ۱

$$S(r) = 6r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S'(r) = 6 - 4r - \pi r \Rightarrow 6 - 4r - \pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{6}{4 + \pi}$$

r	$\frac{6}{4 + \pi}$	
S'	+	-
S	↗	↘

$$h = \frac{6 - (2 + \pi)\frac{6}{4 + \pi}}{2} = \frac{6}{4 + \pi}$$

۵۰۲ بزرگترین بازه از R که تابع $f(x) = -x^2 + 6x + 11$ در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

پاسخ: ۱

x	-3	3
f'	-	+
f	↘	↗

پس تابع در بازه $[-3, 3]$ صعودی اکید است.

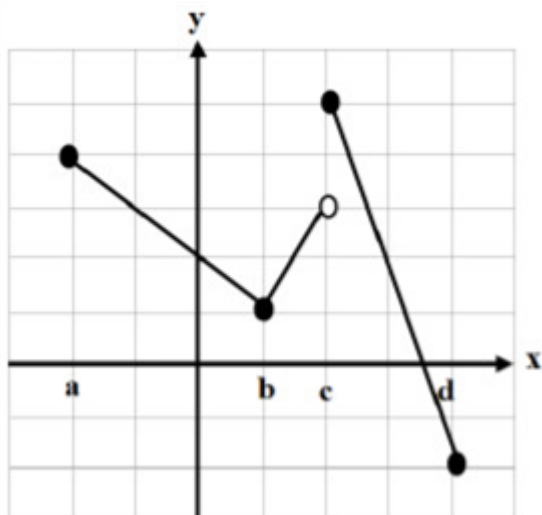
۵۰۳ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن تابع است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست



در شکل زیر نمودار تابع f رسم شده است. طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و مطلق را مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ d مینیمم مطلق

c ماکزیمم مطلق

c ماکزیمم نسبی

b مینیمم نسبی

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

اگر $f'(c) = 0$ باشد، آنگاه $x = c$ یک نقطه اکسترمم نسبی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$x - y = 10$$

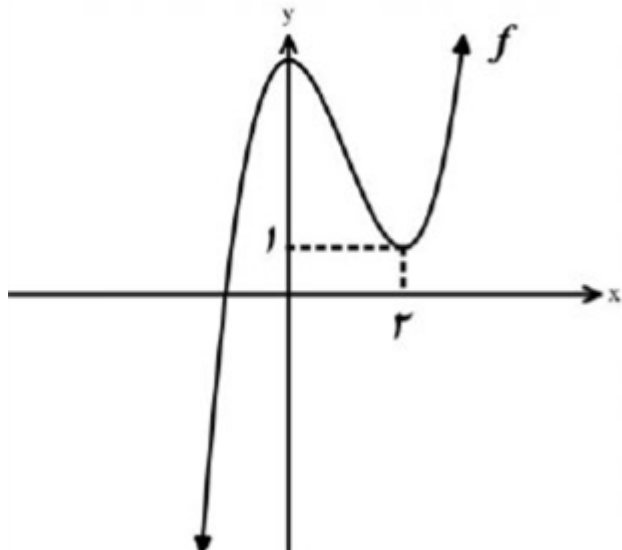
$$p = xy = x(x - 10) = x^2 - 10x$$

$$p'(x) = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5, y = -5$$

پاسخ: ۱



۵۰۷ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ به صورت شکل مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

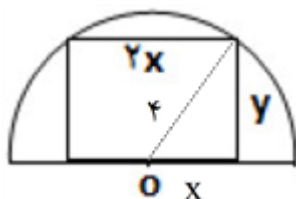
$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \Rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + (-12) + d = 1 \Rightarrow d = 5$$

پاسخ: ۱

۵۰۸ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱



$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow S(x) = 2x(\sqrt{16 - x^2})$$

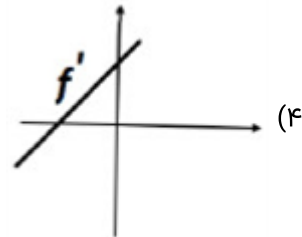
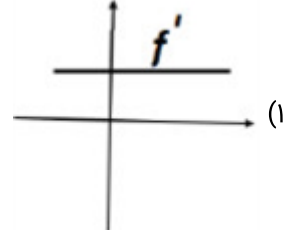
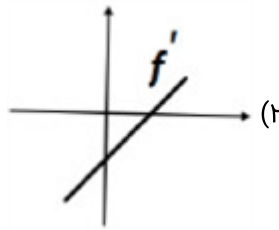
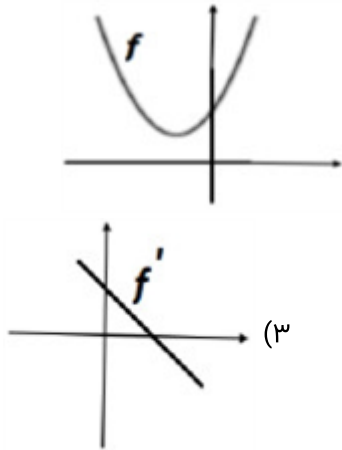
$$S'(x) = \frac{32 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{4}, y = \sqrt{4}$$

پاسخ: ۱

طول $\sqrt{4}$ و عرض $\sqrt{4}$ است.



۵۰۹ با توجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور x ها را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند.

x	$x_S < 0$	
f	نزولی	صعودی
f'	-	+

۵۱۰ نشان دهید در بین مستطیل‌هایی با محیط ۱۶ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$y = 8 - x \Rightarrow S(x) = -x^2 + 8x \Rightarrow S'(x) = -2x + 8 = 0$$

$$x = 4, y = 4$$

پاسخ: ۱

۵۱۱ با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} x = 2, x = -2$$

صعودی $(-\infty, -2), (2, +\infty)$ اکیداً صعودی

پاسخ: ۱

x	-2	2
f'	+	-
f	↗	↘



۵۱۲) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر نقطه دلخواه از دامنه تابع ثابت، یک نقطه بحرانی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ درست

۵۱۳) ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax - b$ طوری پیدا کنید که نقطه $(1, 2)$ اکسترمم نسبی تابع باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$f(1) = 2 \Rightarrow a - b = 1$$

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + a \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3, b = -4$$

۵۱۴) جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

- اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ در این صورت $f(c)$ را یک تابع f می‌نامیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ ماکزیمم نسبی

۵۱۵) اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه‌ای $5x - y = 10$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$p = xy = 5x^2 - 10x \Rightarrow p'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = -5 \end{matrix}$$

پاسخ: ۱

۵۱۶) اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$ را در صورت وجود به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

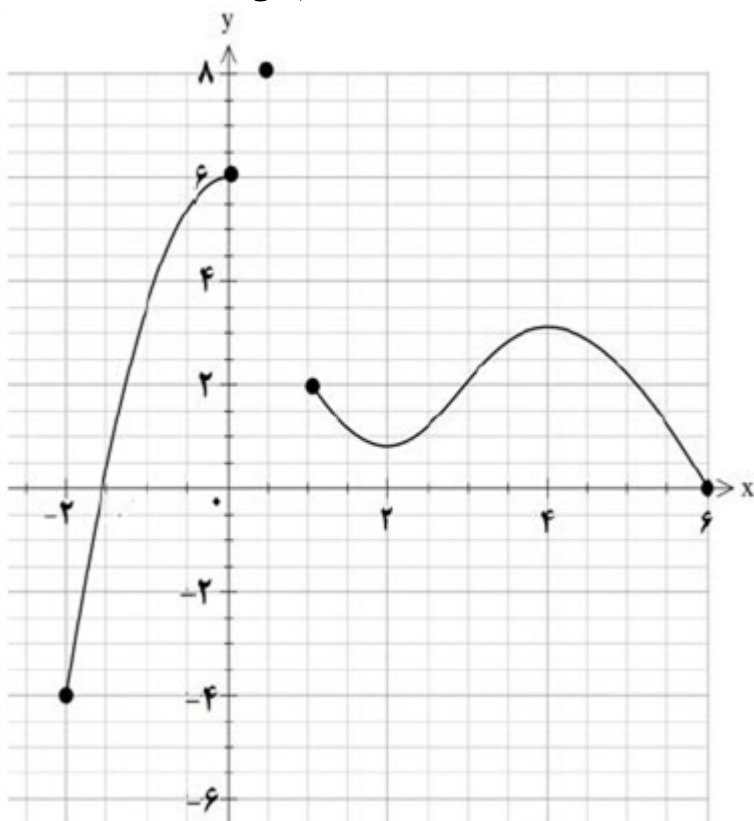
$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$$

پاسخ: ۱

x	-1	3	
f'	+	-	+
f			
	max	min	
	$\frac{7}{3}$	$-\frac{25}{3}$	



با توجه به نمودار داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



- الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید.
 ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید.
 پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید.
 ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

ت) ۲

پ) ۴

ب) -۴

الف) ۸ **پاسخ: ۱**

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- هر نقطه بحرانی تابع $f(x)$ ، یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

نادرست **پاسخ: ۱**

۵۱۹) مقادیر اکسترمم مطلق تابع $g(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود تعیین کنید.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$$

پاسخ: ۱

$$g(-2) = -8 - 4 - 5 = -17 \min, g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \max$$

۵۲۰) اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-1, 3]$ مشخص کنید.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \notin [-1, 3] \end{cases}$$

پاسخ: ۱

$$f(-1) = 13$$

$$f(1) = -7 \Rightarrow \min(1, -7)$$

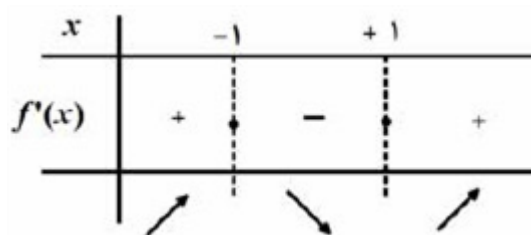
$$f(3) = 45 \Rightarrow \max(3, 45)$$



۵۲۱ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



پاسخ: ۱

اکیداً صعودی $(-\infty, -1), (1, +\infty)$

اکیداً نزولی $(-1, +1)$

۵۲۲ ورق فلزی مستطیل شکلی، به طول ۱۶ سانتی‌متر و عرض ۶ سانتی‌متر در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه سر باز ساخته شود. مقدار x چه قدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$عرض\ جعبه = 6 - 2x, x \in [0, 3] \quad طول\ جعبه = 16 - 2x, x \in [0, 3]$$

پاسخ: ۱

$$\Rightarrow v(x) = x(16 - 2x)(6 - 2x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x, 0 \leq x \leq 3$$

$$v'(x) = 12x^2 - 88x + 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \notin [0, 3] \\ x = \frac{4}{3} \in [0, 3] \end{cases}$$

چون $v(0) = v(3) = 0$ ، پس به ازای $x = \frac{4}{3}$ بیش‌ترین مقدار حجم حاصل می‌شود.

۵۲۳ اکستریم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را در بازه $[-1, 1]$ تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(0) = 1 \quad \max \\ f(-1) = -3 \quad \min \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۵۲۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- اگر علامت f' بر بازه‌ای منفی باشد، آن‌گاه تابع f بر آن بازه اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

۵۲۵ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- اگر تابع f در هر نقطه اکستریم نسبی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

۵۲۶ در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$2(x + y) = 14 \Rightarrow x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x$$

پاسخ: ۱

$$y = 7 - x \Rightarrow s = (y)(x) = 7x - x^2 \Rightarrow s'(x) = 7 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3.5, y = 3.5$$



۵۲۷ اگر نقطه $(۲, ۱)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$f'(۲) = ۰ \Rightarrow ۱۲ + ۴b = ۰ \Rightarrow b = -۳$$

$$f(۲) = ۱ \Rightarrow ۴b + d = -۷$$

$$-۱۲ + d = -۷ \Rightarrow d = ۵$$

پاسخ: ۱

۵۲۸ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ در آن اکیداً نزولی است برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ $[-۱, ۱]$

۵۲۹ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

۵۳۰ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

اگر $x = c$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c) = ۰$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

۵۳۱ نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیش‌ترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$۲(x + y) = ۱۴ \Rightarrow x + y = ۷ \Rightarrow y = ۷ - x$$

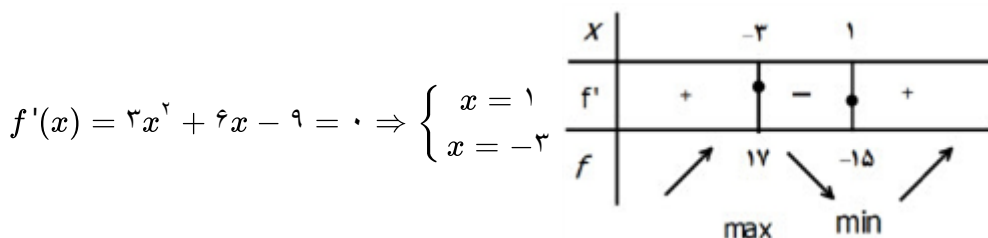
$$f = xy \Rightarrow f(x) = x(۷ - x) = -x^۲ + ۷x \Rightarrow f'(x) = -۲x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۷}{۲}, y = \frac{۷}{۲}$$

پاسخ: ۱

۵۳۲ در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x - ۱۰$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹



پاسخ: ۱

۵۳۳ مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$ را در بازه $[-۱, ۲]$ تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases}$$

$$f(۱) = -۱ \quad f(-۱) = ۳ \quad f(۲) = ۳ \Rightarrow \begin{cases} \max f(x) = ۳ \\ \min f(x) = -۱ \end{cases}$$

پاسخ: ۱



۵۳۴ اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای اکسترمم نسبی برابر ۳- باشد، مقادیر a و b را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$f'(x) = 2ax + b$$

پاسخ: ۱

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$f(1) = -3 \Rightarrow a + b = -3 \Rightarrow b = -6$$

۵۳۵ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۲۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$a - b = 20 \Rightarrow a = b + 20$$

پاسخ: ۱

$$f(b) = b(b + 20) \Rightarrow f'(b) = 2b + 20 = 0$$

$$b = -10, a = +10$$

۵۳۶ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 7$ را در بازه $[-1, 3]$ ، در صورت وجود به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

$$f(-1) = 9$$

$$f(1) = 5 \Rightarrow \max(3, 5), \min(1, 5)$$

$$f(3) = 25$$

۵۳۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در بازه $(-1, 1)$ اکیداً صعودی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست

۵۳۸ اگر نقطه $(-2, 5)$ ، نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx$$

پاسخ: ۱

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow 12 - 4b = 0 \Rightarrow b = 3$$

$$f(-2) = 5 \Rightarrow -8 + 4b + d = 5 \Rightarrow d = 1$$

۵۳۹ هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت 32 cm^2 خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب،

لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه 2 cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتیمتر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$xy = 32 \Rightarrow f(x) = (y + 2)(x + 4) = \frac{128}{x} + 40 + 2x \Rightarrow f'(x) = -\frac{128}{x^2} + 2 = 0$$

پاسخ: ۱

$$\Rightarrow x = 8, y = 4$$

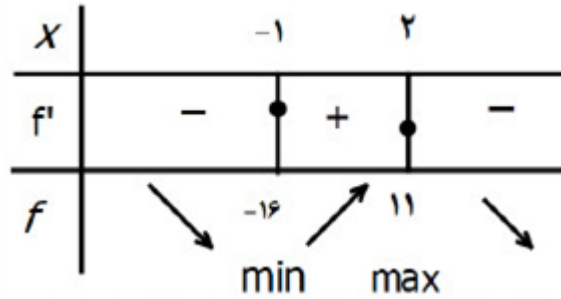
ابعاد صفحه: 12×6 است.



۵۴۰ تابع $f(x) = -2x^2 + 3x + 12x - 9$ در نظر بگیرید:

- الف) با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.
 ب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازه $[0, 3]$ در صورت وجود به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹



پاسخ: ۱ الف)

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

ب) $f(0) = -9$ min

$f(2) = 11$ max $\Rightarrow f(3) = 0$

۵۴۱ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

نقطه‌ای از دامنه تابع که مشتق در آن وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است، نقطه نام دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ بحرانی (۰/۲۵)

۵۴۲ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$f(x) = xy \Rightarrow f(x) = x(x + 10) = x^2 + 10x \Rightarrow f'(x) = 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = -5, y = 5$$

پاسخ: ۱

۵۴۳ اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = 2x^2 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-1, 2]$ مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

قابل قبول نیست $x = -2$
 $f(-1) = 13, f(2) = 4, f(1) = -7 \Rightarrow \min : (1, -7), \max : (-1, 13)$

۵۴۴ دو عدد حقیقی a و b را طوری بیابید که داشته باشیم $2a + b = 60$ و حاصل ضرب آن‌ها بیشترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$2a + b = 60 \Rightarrow b = 60 - 2a \Rightarrow ab = a(60 - 2a) = 60a - 2a^2$$

پاسخ: ۱

$$(ab)' = 60 - 4a = 0 \Rightarrow a = 15 \Rightarrow b = 60 - 2 \times 15 = 30$$

۵۴۵ اکسترم‌های مطلق تابع $g(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$g(x) = x^3 + 2x - 5 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$$

پاسخ: ۱

$$g(-2) = (-2)^3 + 2(-2) - 5 = -8 - 4 - 5 = -17 \text{ min}$$

$$g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \text{ max}$$



جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 3x + 4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. **۵۴۶**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

الف) $f(x) = x^3 - 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

پاسخ: ۱

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)	+	-	+	
f(x)	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		۶	۲	

نقطه‌ی (۱, ۲) مینیمم نسبی و نقطه‌ی (-۱, ۶) ماکزیمم نسبی است.

مقادیر اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$ را در بازه $[-2, 3]$ به دست آورید. **۵۴۷**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$f'(x) = x^2 + 2x \xrightarrow{f'=0} x = 0, x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{4}{3}, f(0) = 0$ مینیمم مطلق

پاسخ: ۱

ماکزیمم $f(3) = 18$

x	-2	0	3
f'	+	-	+
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	$\frac{4}{3}$	0	18

مینیمم نسبی $f(0) = 0$

۵۴۸ ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x بر می‌گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$V(x) = (1 - 2x)^2 \times x = x - 4x^2 + 4x^3$$

پاسخ: ۱

$$V'(x) = 1 - 8x + 12x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{6}$$

$x = \frac{1}{6}$ قابل قبول است. $0/25$



۵۴۹ اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 0 = 2a + b \Rightarrow b = -2a$$

پاسخ: ۱

$$f(1) = 7 \Rightarrow 7 = a + b \Rightarrow a = -7, b = 14$$

۵۵۰ تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} \xrightarrow{f'(x)=0} x = 0$$

پاسخ: ۱

(۰/۲۵) نزولی $(-\infty, 0)$

(۰/۲۵) صعودی $(0, +\infty)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

(۰/۵)

۵۵۱ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ را در بازه $[0, 2]$ تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 4}} \xrightarrow{f'=0} x = 1, \quad \begin{array}{l} f(0) = f(2) = 2 \text{ (۰/۲۵) مقدار ماکزیمم مطلق} \\ f(1) = \sqrt{3} \text{ (۰/۲۵) مقدار مینیمم مطلق} \end{array}$$

پاسخ: ۱

سوال ۵۱

فصل ۶: هندسه

۵۵۲ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- هر چه خروج از مرکز بیضی کوچکتر و به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیکتر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ درست

۵۵۳ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $(-2, 1)$ بوده و بر خط $4x - 3y = 25$ مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$r = \frac{|4 + 6 - 25|}{\sqrt{16 + 9}} = 3$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

پاسخ: ۱



۵۵۴) کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱, ۳)$ و $(۱, -۵)$ است. اگر اندازه نصف قطر بزرگ آن برابر ۵ باشد، اندازه قطر کوچک بیضی را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\begin{cases} 2c = 3 - (-5) = 8 \Rightarrow c = 4 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 6$$

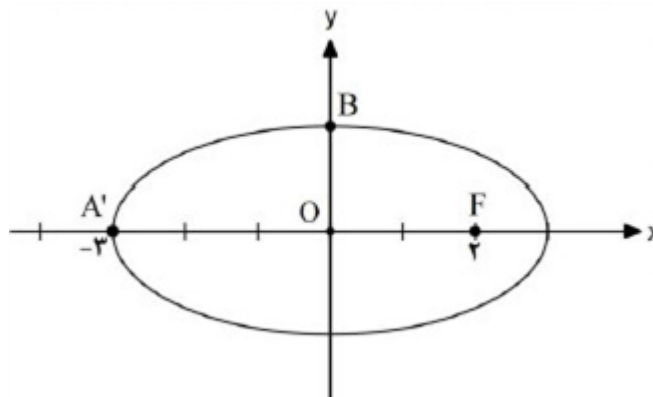
پاسخ: ۱

۵۵۵) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه آن است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ مخروط

۵۵۶) در شکل زیر طول پاره خط OB را محاسبه کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$OA' = a = 3 \Rightarrow OB = b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

پاسخ: ۱

۵۵۷) وضعیت دو دایره به معادله $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ را نسبت به هم بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$\left. \begin{aligned} O(-1, 2), r = 1 \\ O'(1, -2), r' = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4} = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \\ OO' = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow OO' > r + r'$$

پاسخ: ۱

دو دایره متخارج هستند.

۵۵۸) معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن $(1, 2)$ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$r = \frac{|3(1) + 4(2) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

پاسخ: ۱



۵۵۹ اگر خروج از مرکز یک بیضی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و طول قطر کوچک آن ۱۰ باشد آنگاه فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad BB' = 2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

پاسخ: ۱

$$a^2 = 25 + \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow a = 10 \xrightarrow{c=5\sqrt{3}} FF' = 2c = 10\sqrt{3}$$

۵۶۰ جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.

اگر صفحه‌ای سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس نگذرد شکل حاصل را می‌نامیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ هذلولی

۵۶۱ اگر مرکز دایره $x^2 + y^2 + ax - 4y - 4 = 0$ نقطه $O(1, 2)$ باشد.

الف) مقدار a را بیابید. ب) شعاع دایره را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\text{الف) } -\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} \Rightarrow r = 3$$

۵۶۲ در یک بیضی فاصله کانونی با طول قطر کوچک آن برابر است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$2b = 2c \Rightarrow b = c \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}c$$

پاسخ: ۱

$$e = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{2}c} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵۶۳ جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.

اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ سهمی

۵۶۴ معادلهٔ دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ است، مختصات مرکز این دایره را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$\Rightarrow O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{6}{2}\right) = (1, 3)$$

پاسخ: ۱



۵۶۵ معادله قطر کانونی یک بیضی، $y = -1$ و معادله قطر کوچک، $x = 2$ است. اگر طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۱۲ و ۸ واحد باشند، مرکز بیضی و فاصله کانونی را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۱ پاسخ: مرکز بیضی محل برخورد قطر کانونی و قطر کوچک است، پس: $O(2, -1)$

با توجه به اینکه $AA' = 12$ و $BB' = 8$ ، بنابراین:

$$AA' = 2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$BB' = 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5} \Rightarrow FF' = 2c = 4\sqrt{5}$$

همچنین:

۵۶۶ وضعیت خط $3x + 4y = 0$ را نسبت به دایره به معادله $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$ مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$O(2, -2), r = 3, d = \frac{|3 \times 2 + 4(-2)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2}{5}$$

۱ پاسخ:

چون شعاع دایره بزرگتر از فاصله مرکز دایره تا خط می‌باشد، پس خط و دایره متقاطع هستند.

۵۶۷ مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی نقاط $(1, -2)$ و $(1, 6)$ است. اگر خروج از مرکز این بیضی $\frac{1}{4}$ باشد، فاصله کانونی آن را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4, \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow FF' = 2c = 4$$

۱ پاسخ:

۵۶۸ جمله‌ی زیر را کامل کنید.

اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۱ پاسخ: دایره

۵۶۹ اگر دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ و $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = m^2$ مماس خارج باشند، مقدار m را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 : O(-1, 2), r = 2$$

۱ پاسخ:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = m^2 : O'(2, -1), r' = m$$

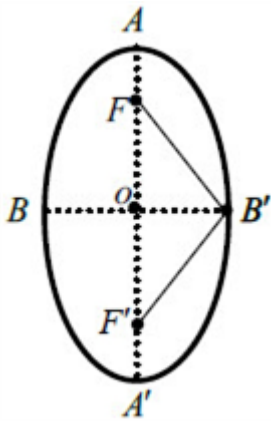
$$OO' = 3\sqrt{2}$$

$$OO' = r + r' \Rightarrow m + 2 = 3\sqrt{2} \Rightarrow m = 3\sqrt{2} - 2$$

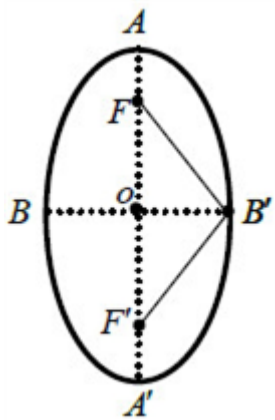


۵۷۰

در بیضی مقابل کانون‌ها به مختصات $F(1, 5)$ و $F'(1, 1)$ و یک رأس بزرگ آن $A(1, 6)$ می‌باشد:
 الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.
 ب) معادله قطر کوچک بیضی را بنویسید.
 پ) مساحت مثلث $FF'B'$ را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲



الف) $FF' = 4$, $O(1, 3)$

ب) $y = 3$

پ) $OB' = \sqrt{OA^2 - OF^2} = \sqrt{5}$

$S = \frac{1}{2} OB' \times FF' = 2\sqrt{5}$

پاسخ: ۱

۵۷۱

معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بیابید.

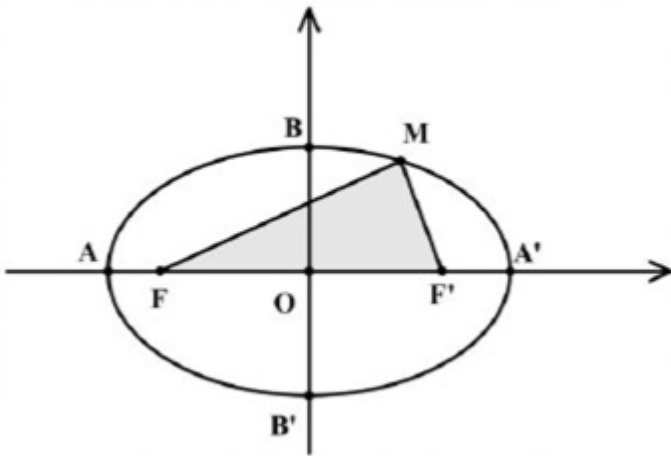
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (-1, -1)$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \sqrt{10}$

پاسخ: ۱

۵۷۲ اگر در بیضی مقابل مختصات کانون $F'(4, 0)$ و مختصات رأس $B(0, 3)$ باشد:
الف) قطر بزرگ بیضی را بیابید.

ب) محیط مثلث $(MF'F)$ را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف)
$$\begin{cases} b = 3 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2a = 10$$

ب) محیط $= 2a + 2c = 18$

پاسخ: ۱

۵۷۳ معادله گسترده دایره $C(O, R)$ به شکل $x^2 + y^2 + 2y - 4x - 4 = 0$ است.
الف) مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید.

ب) آیا نقطه $A(0, 3)$ روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟

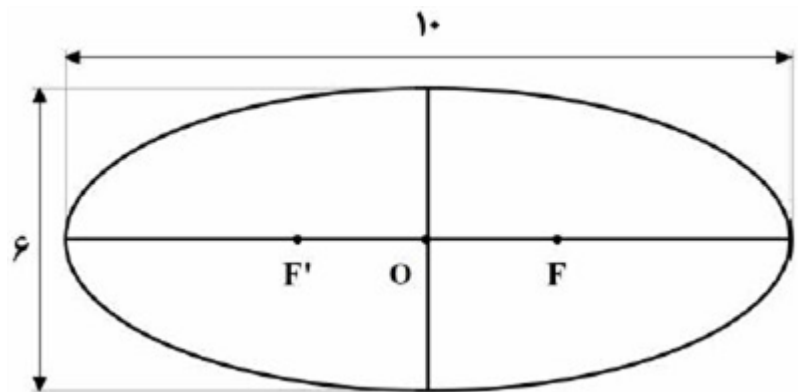
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

الف) $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2, -1), R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 3$

ب) خیر زیرا: $(0)^2 + (3)^2 + 2(3) - 4(0) - 4 \neq 0$

پاسخ: ۱

۵۷۴ در بیضی زیر فاصله کانونی را محاسبه کنید. F و F' کانون‌های بیضی هستند.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=5, b=3} c = 4 \Rightarrow FF' = 8$

پاسخ: ۱

۵۷۵ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

- شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، آن نامیده می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ سطح مقطع



۵۷۶) معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(1, 4)$ و بر خط $3x + 4y = -1$ مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

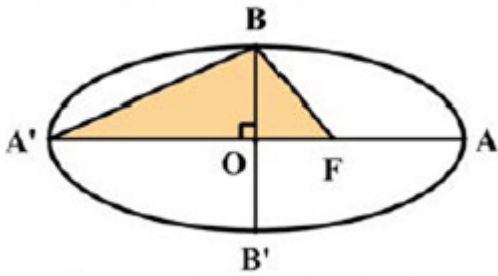
$$r = \frac{|3 \times 1 + 4(4) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$$

پاسخ: ۱

۵۷۷) اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد:

الف) مقدار $A'F$ را به دست آورید. (F کانون بیضی است)

ب) مساحت مثلث هاشورخورده $(\triangle BF'A')$ چقدر است؟

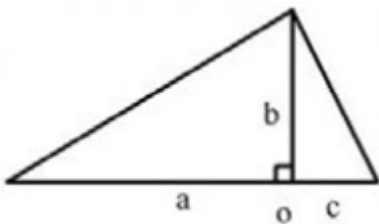


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

الف) $a = 5, b = 4 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow A'F = 8$

پاسخ: ۱

(ب)



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (5 + 3) \times 4 = 16$$

۵۷۸) کدامیک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ قرار دارد؟

(-1, 0) ۴

(0, -1) ۳

(1, 0) ۲

(0, 0) ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$O \left| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right|, R = \sqrt{1 + 4 - 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$A \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right| \Rightarrow OA = \sqrt{(1-1)^2 + (0+2)^2} = 2 \Rightarrow OA = R$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ $\frac{3}{4}$

۵۷۹) در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

- خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر است.

۵۸۰) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد.

پاسخ: ۱ نادرست

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱



۵۸۱) معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(۰, ۳)$ و بر خط $۳x - ۴y = ۳$ مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$r = \frac{|۳ \times ۰ - ۴ \times ۳ - ۳|}{\sqrt{۳^2 + (-4)^2}} = ۳ \Rightarrow (x - ۰)^2 + (y - ۳)^2 = ۹$$

پاسخ: ۱

۵۸۲) وضعیت خط $x + y = ۳$ و دایره $x^2 + y^2 - ۲x - ۳ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{۴ + ۰ + ۱۲} = ۲, O(۱, ۰)$$

پاسخ: ۱

$$OH = \frac{|۱ \times ۱ + ۰ \times ۱ - ۳|}{\sqrt{۱^2 + ۱^2}} = \sqrt{۲} \Rightarrow OH < R$$

خط و دایره متقاطع‌اند.

۵۸۳) در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(۴, ۵)$ باشد: الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید. ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.

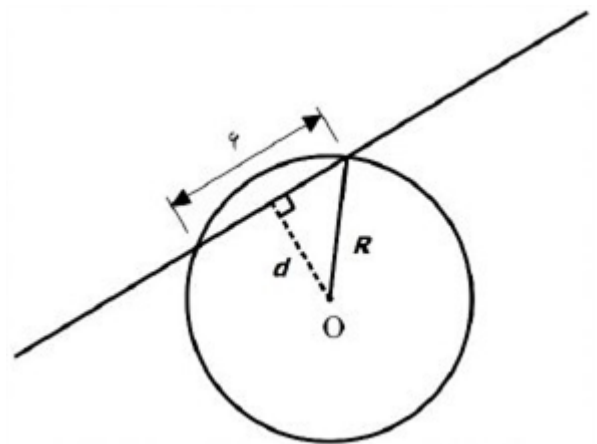
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$c^2 = a^2 - b^2 = ۹ - ۴ = ۵ \Rightarrow c = \sqrt{۵} \Rightarrow FF' = ۲\sqrt{۵}$$

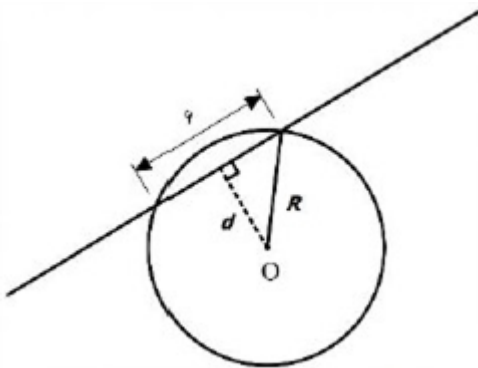
پاسخ: ۱

$$\text{ب) } A(۴ + ۳, ۵), A'(۴ - ۳, ۵)$$

۵۸۴) مرکز دایره‌ای، نقطه $O(۲, -۳)$ است. این دایره روی خط $۳x - ۴y + ۲ = ۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰



$$d = \frac{|۳ \times ۲ - ۴(-۳) + ۲|}{\sqrt{۳^2 + (-4)^2}} = ۴$$

$$R = \sqrt{۳^2 + ۴^2} = ۵ \Rightarrow (x - ۲)^2 + (y + ۳)^2 = ۲۵$$

پاسخ: ۱



۵۸۵

کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ است.
الف) فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.
ب) اگر $a = 6$ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

الف) $O \left(\begin{array}{l} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{array} \right)$ مرکز $FF' = |3 - (-5)| = 8 = 2C \Rightarrow C = 4$

پاسخ: ۱

ب) $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20}$

۵۸۶

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
- شعاع دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ ۲

۵۸۷

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر خواهد شد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

۵۸۸

اگر معادله دایره به شکل $(x+1)^2 + y^2 = 4$ باشد:
الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.
ب) مختصات تقاطع دایره با محور x ها را پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

الف) $O(-1, 0), R = 2$

ب) $(1, 0), (-3, 0)$

پاسخ: ۱

۵۸۹

خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4, -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.
الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.
ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

الف) $c = \frac{4}{5}a \Rightarrow 9 + \frac{16}{25}a^2 = a^2 \Rightarrow a = 5, c = 4 \Rightarrow FF' = 8, AA' = 10$

ب) $A(1, -1), A'(-9, -1)$

پاسخ: ۱

۵۹۰

عبارت مناسب را انتخاب کنید.
اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل نزدیک خواهد شد. (پاره‌خط - دایره - نقطه)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ دایره

۵۹۱

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y = 1$ مماس بوده و مرکز آن $(1, 2)$ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$R = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2, (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

پاسخ: ۱



۵۹۲) کانون‌های یک بیضی نقاط $(۲, ۵)$ و $(۲, -۳)$ و $a = ۵$ است. مختصات مرکز و اندازه‌ی قطر کوچک بیضی را پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$O(۲, ۱), c = ۴ \Rightarrow ۲۵ = b^2 + ۱۶ \Rightarrow ۲b = ۶$$

پاسخ: ۱

۵۹۳) عبارت مناسب را انتخاب کنید.

اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی خواهد بود. (بیضی - سهمی - هذلولی)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ بیضی

۵۹۴) کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱, ۳)$ و $(۱, -۵)$ است.

الف) فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ بیضی را بنویسید.
ب) اگر $a = ۵$ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$\text{الف) } O \left(\begin{array}{l} \frac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ \frac{۳-۵}{۲} = -۱ \end{array} \right) \text{ مرکز } FF' = |۳ - (-۵)| = ۸ = ۲c \Rightarrow c = ۴$$

پاسخ: ۱

و معادله قطر بزرگ: $x = ۱$

$$\text{ب) } b^2 = a^2 - c^2 = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Rightarrow b = ۳ \Rightarrow BB' = ۲b = ۶, e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$$

۵۹۵) وضعیت دایره‌ی $(x - ۲)^2 + (y + ۳)^2 = ۴$ و خط $y = -۱$ را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$O(۲, -۳), r = ۲, d = \frac{|-۳ + ۱|}{\sqrt{۰ + ۱}} = ۲$$

پاسخ: ۱

خط و دایره بر هم مماس هستند.

۵۹۶) کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱, ۳)$ و $(۱, -۵)$ است.

الف) فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.
ب) اگر $a = ۶$ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$\text{الف) } O \left(\begin{array}{l} \frac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ \frac{۳-۵}{۲} = -۱ \end{array} \right) \text{ مرکز } FF' = |۳ - (-۵)| = ۸ = ۲c \Rightarrow c = ۴$$

پاسخ: ۱

فاصله کانونی برابر ۸ است.

$$\text{ب) } b^2 = a^2 - c^2 = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow b = \sqrt{۲۰} \Rightarrow BB' = ۲\sqrt{۲۰}, e = \frac{c}{a} = \frac{۲}{۳}$$

۵۹۷) اگر در یک بیضی داشته باشیم $a = ۵$ و $b = ۳$ در این صورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۸

$$c^2 = a^2 - b^2 = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow c = ۴ \Rightarrow ۲c = ۸$$

پاسخ: ۱



۵۹۸ وضعیت خط $x + y = 3$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$O(1, 0), r = 2$$

پاسخ: ۱

$$d = \frac{|1(1) + 1(0) - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \text{مقاطعون}$$

۵۹۹ درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.

شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه به صورت مخروط می‌باشد. (درست، نادرست)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ درست ۰/۲۵

۶۰۰ در جای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.

هرچه خروج از مرکز بیضی (کوچکتر، بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ کوچکتر ۰/۲۵

۶۰۱ در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله‌ی کانونی بیضی را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4, \quad 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

پاسخ: ۱

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

۰/۲۵

$$2c = 2\sqrt{7}$$

۰/۲۵

۶۰۲ وضعیت دو دایره به معادلات $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ دو دایره متخارج هستند. ۰/۲۵

$$O_1 = (-1, 2), r_1 = 1, \quad O_2 \begin{cases} \frac{-a}{2} = 1 \\ \frac{b}{-2} = -2 \end{cases}, r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 2$$

۰/۵ ۰/۷۵

$$d = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{20} > 1+2=3$$

۰/۵



۶۰۳ دو جعبه یکسان داریم، درون یکی از آنها ۱۰ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب است و درون جعبه دیگر ۲۰ لامپ قرار دارد که ۵ تا از آنها معیوب اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن به تصادف بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ انتخابی سالم باشد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ اگر پیشامد سالم بودن را A و جعبه اول را B_1 و جعبه دوم را B_2 در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{20} = \frac{6}{20} + \frac{15}{40} = \frac{27}{40}$$

۶۰۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند، هرگاه $A \cap B = \emptyset$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ نادرست

۶۰۵ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۶ مهره زرد و ظرف دوم شامل ۴ مهره قرمز و ۷ مهره زرد است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب می‌کنیم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره زرد است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$\frac{6}{11} \times \frac{8}{12} + \frac{5}{11} \times \frac{7}{12} = \frac{83}{132}$$

پاسخ: ۱

(به نمودار درختی نیز نمره تعلق گیرد.)

۶۰۶ جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.

اگر دو پیشامد A و B با هم رخ ندهند، آنگاه دو پیشامد هستند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ ناسازگار

۶۰۷ یک سکه را پرتاب می‌کنیم اگر «پشت» بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم و اگر «رو» بیاید ۲ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً دو سکه «رو» ظاهر شود چقدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{7}{16}$$

پاسخ: ۱

توجه نمایید که فضای نمونه‌ای هم‌شانس نیست.

۶۰۸ جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.

دو پیشامد را گوییم هرگاه وقوع هریک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ مستقل



۶۰۹

سه ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۵ مهره قرار دارد که ۳ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد و در ظرف سوم ۱۲ مهره داریم که ۶ تای آنها قرمز است. با چشم بسته یک ظرف را انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$P = \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{15} \right) + \left(\frac{1}{3} \times 0 \right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{6}{12} \right) = \frac{7}{30}$$

پاسخ: ۱

۶۱۰

فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۵ درصد مرد و ۵۵ درصد زن باشد و شیوع یک بیماری ویروسی به ترتیب در این دو دسته ۴ درصد و ۶ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$p = (0/45 \times 0/04) + (0/55 \times 0/06) = 0/051$$

پاسخ: ۱

۶۱۱

دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۹ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب قرار دارد و درون جعبه دیگر ۱۵ لامپ قرار دارد که ۵ تای آنها معیوب است. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم چقدر احتمال دارد لامپ موردنظر سالم باشد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{15} = \frac{17}{24}$$

پاسخ: ۱

به روش حل نمودار درختی نمره تعلق گیرد.

۶۱۲

جمله‌ی زیر را کامل کنید.

هرگاه برای دو پیشامد A و B داشته باشیم $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ، آن‌گاه دو پیشامد A و B، هستند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ مستقل

۶۱۳

مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش‌آموز دارد. ۳۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند، اگر همه دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم: الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟ ب) با چه احتمالی فرد انتخابی، معدلی بالای ۱۸ دارد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\text{الف) } P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{4}$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B) = \frac{3}{4} \times \frac{35}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{15}{100} = \frac{3}{10}$$

به روش حل نمودار درختی نمره تعلق گیرد.

۶۱۴

در جای خالی عبارت مناسب را قرار دهید.

اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C = \dots$ باشند، آنگاه A، B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $\{1\}$



۶۱۵

دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۳ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره سبز و ۶ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره سبز است؟

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$P(A) = P(B_1)P(B_1|A) + P(B_2)P(B_2|A)$$

$$P(A) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{11} + \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = \frac{37}{88}$$

به روش حل نمودار درختی نمره تعلق گیرد.

۶۱۶

چهار ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۰ مهره قرار دارد که ۶ تای آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۱۲ مهره قرار دارد که ۴ تای آن‌ها قرمز هستند. و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم، احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$P(R) = P(A_1)P(R|A_1) + P(A_2)P(R|A_2) + P(A_3)P(R|A_3) + P(A_4)P(R|A_4)$$

$$\Rightarrow P(R) = \frac{1}{4} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{4}{12} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{29}{60}$$

حل به روش نمودار درختی نمره کامل تعلق گیرد.

۶۱۷

دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم، سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{130}$$

حل به روش نمودار درختی نمره کامل تعلق گیرد.

۶۱۸

۴ ظرف یکسان داریم. در ظرف اول ۱۴ مهره قرار دارد شامل ۴ مهره‌ی قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند و ظرف سوم ۸ مهره دارد که شامل ۶ مهره‌ی قرمز است. در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) + P(B_4)P(A|B_4)$$

$$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{14} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{57}{112}$$

۶۱۹

دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۳ مهره سبز و ۷ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره سبز و ۸ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره آبی است؟

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$P(A) = P(G)P(A|G) + P(B)P(A|B)$$

$$P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{8}{13} + \frac{7}{10} \times \frac{9}{13} = \frac{87}{130}$$



۶۲۰

سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره آبی و ظرف سوم شامل ۶ مهره قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که مهره انتخابی آبی باشد چه قدر است؟

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{11}{24}$$

۶۲۱

عبارت مناسب را انتخاب کنید.

احتمال وقوع پیشامد A به شرط این‌که بدانیم پیشامد B رخ داده است، به صورت نمایش داده می‌شود.

$$(P(A - B), P(A|B), P(B|A))$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ $P(A|B)$

۶۲۲

عبارت مناسب را انتخاب کنید.

دو پیشامد A و B را گوییم هرگاه وقوع هریک بر احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. (مستقل - ناسازگار - سازگار)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ مستقل

۶۲۳

اگر احتمال انتقال نوعی بیماری عفونی به نوزاد پسر 0.07 و نوزاد دختر 0.04 باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشند، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{100} = \frac{11}{200}$$

پاسخ: ۱

۶۲۴

اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر 0.08 و نوزاد دختر 0.03 باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشند، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

پاسخ: ۱

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200}$$

۶۲۵

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند هرگاه با هم رخ ندهند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ نادرست $A, B \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ مستقل

۶۲۶

فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۰ درصد مرد و ۶۰ درصد زن باشند و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این دو گروه به ترتیب ۳ درصد و ۵ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$P(A) = \frac{40}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{42}{1000}$$

پاسخ: ۱



۶۲۷

دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهره آبی و ۵ مهره قرمز است و ظرف دوم شامل ۶ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$p(A) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{15} + \frac{5}{12} \times \frac{6}{15} = \frac{79}{180}$$

۶۲۸

در جای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.
دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد (مستقل، ناسازگار) هستند.

پاسخ: ۱

ناسازگار ۰/۲۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

۶۲۹

سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی است. ظرف دوم شامل ۷ مهره سبز و ۳ مهره آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{4}{9}}_{0.5} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{3}{10}}_{0.5} + \underbrace{\frac{1}{3} \times 0}_{0.5} = \frac{67}{270}$$

سوال ۵

مسائل کلی کتاب

۶۳۰

جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه آن است.

پاسخ: ۱

مخروط

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۶۳۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند، هرگاه $A \cap B = \emptyset$.

پاسخ: ۱

نادرست

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۶۳۲

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.
الف) اگر دوره تناوب تابع $y = \sin bx$ برابر $\frac{\pi}{3}$ باشد، مقدار b برابر است.

ب) دامنه تابع $y = \tan(x)$ برابر است.

پ) اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^2 + x}{2x^2 + 3} = 7$ آنگاه m برابر عدد است.

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

الف) $b = \pm 6$ (ص ۲۷)

ب) $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ (ص ۳۲)

m = ۱۴ (ص ۶۶)



۶۳۳

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) اگر $f(x) = 2x^3 - 1$ باشد، حاصل $f^{-1}(15)$ برابر است.ب) حاصل حد تابع $f(x) = \frac{2x^2}{3x^2 - 1}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ میل می‌کند برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ الف) ۲

ب) $\frac{2}{3}$

۶۳۴

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه سوم است.ب) نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ پایین‌تر از، نمودار تابع $y = x^3$ است.

پ) هر تابع یکنوا، یک به یک است.

ت) مقدار عددی عبارت $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ الف) درست

ب) نادرست

پ) نادرست

ت) درست

