



راه موفقیت دانش آموزان گامی در اجرای عدالت آموزشی

سوالات نهایی

حسابان ۲

۶۰۲ سوال

سوالات نهایی ۹۸ تا ۴۰۴

کانال راه موفقیت دانش

تهیه و تنظیم

چاپ، تکثیر و استفاده از محتوای کانال راه موفقیت برای تمام دانش آموزان ایران زمین رایگان و مجاز است.

[Shad.ir/rmstudent](https://shad.ir/rmstudent)

کتابخانه

سوال ۱۲۷

فصل اول

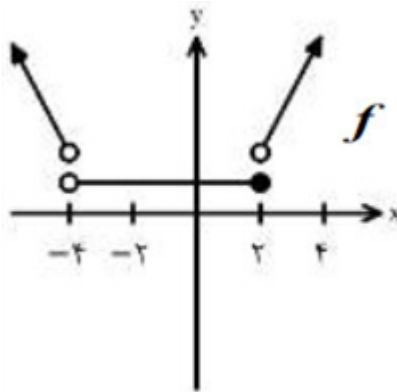
۱ درست یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- نمودار تابع $y = 3f(x)$ با انبساط نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها به دست می‌آید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ درست

۲ با توجه به نمودار تابع f ، در جدول زیر برای هر یک از قسمت‌های ستون A قسمت صحیح از ستون B را انتخاب کنید. (یکی از قسمت‌های ستون B اضافه است.)



B	A
$(-\infty, -4)$ (۱)	الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.
$(2, +\infty)$ (۲)	ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.
$(-1, +\infty)$ (۳)	پ) تابع در این بازه ثابت است.
$(-4, 2]$ (۴)	

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ الف) ۲ ب) ۱ پ) ۴

۳ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر با ۲ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\begin{cases} p(-2) = 0 \\ p(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 7 \\ a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = \frac{11}{3} \end{cases}$$

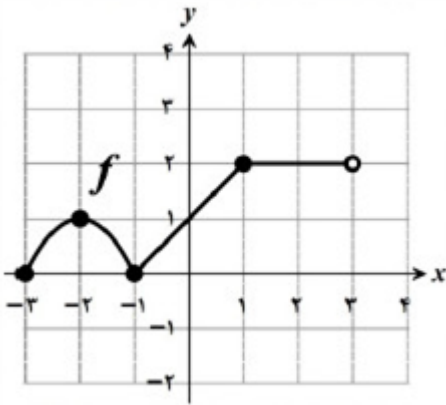
پاسخ: ۱



۴ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر تابع $g(x) = 3f\left(\frac{1}{3}x\right) + 1$ باشد، آنگاه:

الف) دامنه و برد تابع g را به صورت بازه بنویسید.

ب) اگر $A = (-2, 1)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطه متناظر A روی نمودار تابع g را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

الف) $D_g = [-6, 6)$ $R_g = [1, 7]$

ب) $(-4, 4)$

پاسخ: ۱

۵ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $f(x) = (1-x)^3$ ، تابعی اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ درست

۶ اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^2 + a - 2$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$x - a = 0 \Rightarrow x = a$

$a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$ یا $a = -2$

پاسخ: ۱

۷ اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$ باشد، حدود x را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} \Rightarrow x+1 \geq 2x-3 \Rightarrow x \leq 4$

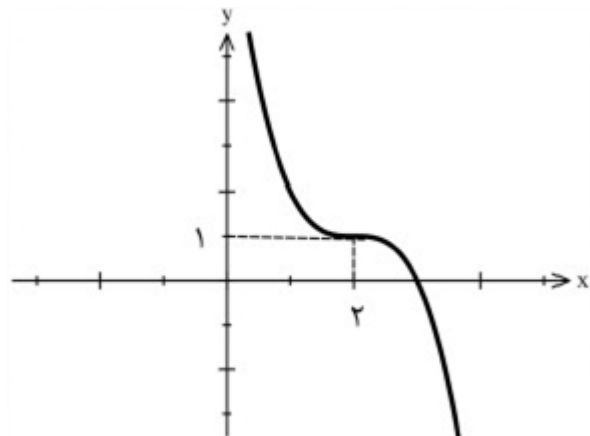
پاسخ: ۱



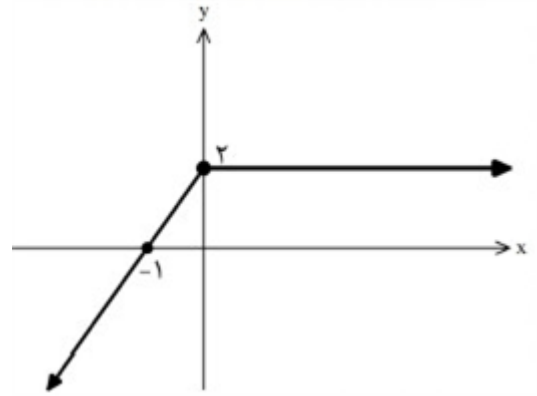
نمودار تابع $f(x) = -(x-2)^2 + 1$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن تابع f را بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ $f(x)$ اکیداً نزولی (یا نزولی) است.



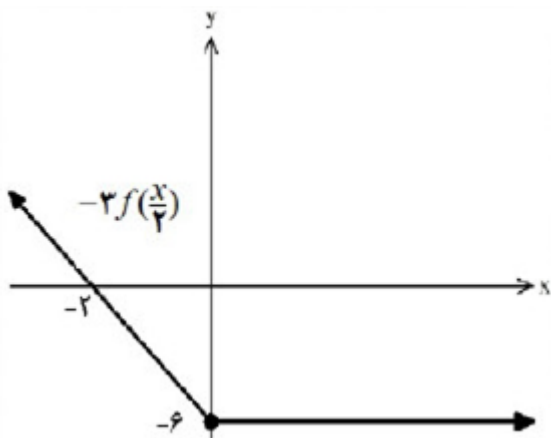
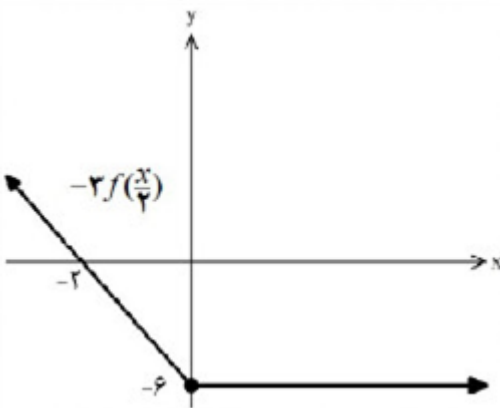
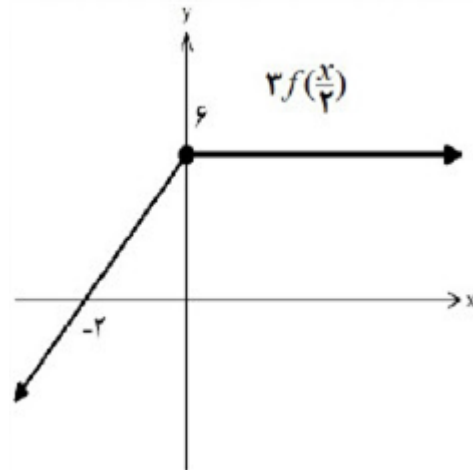
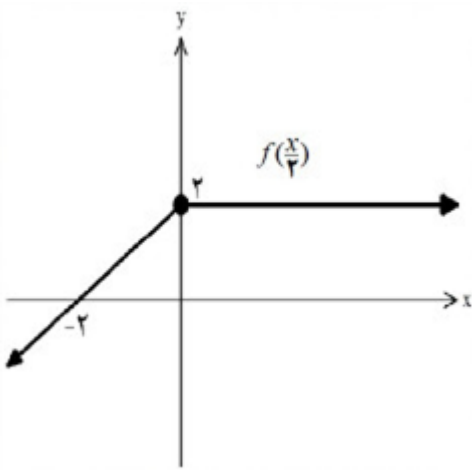
نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.



الف) نمودار تابع $g(x) = -3f\left(\frac{1}{3}x\right)$ را رسم کنید.
ب) مقدار $g(5)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

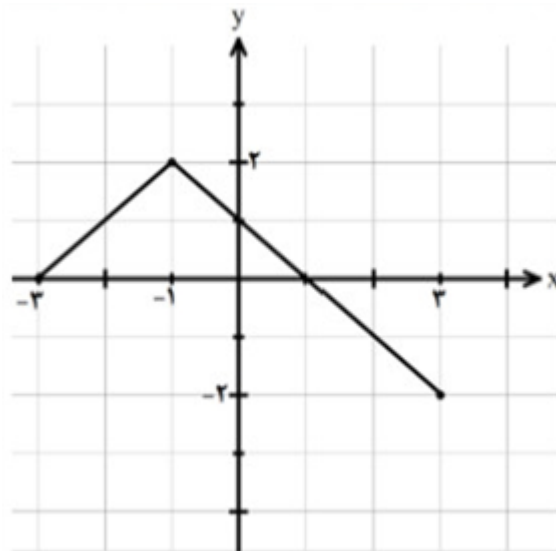
پاسخ: ۱ روش اول:



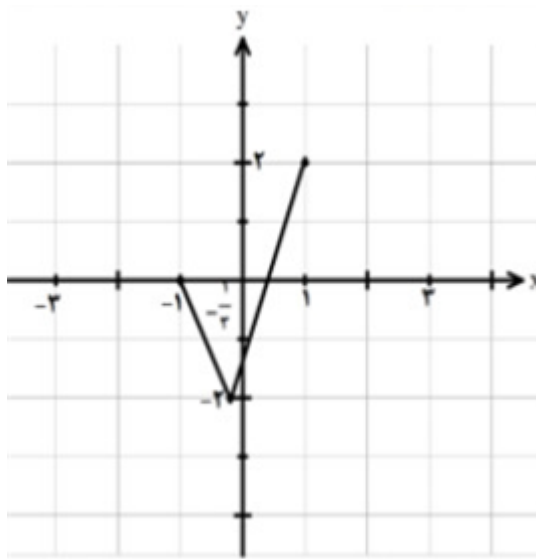
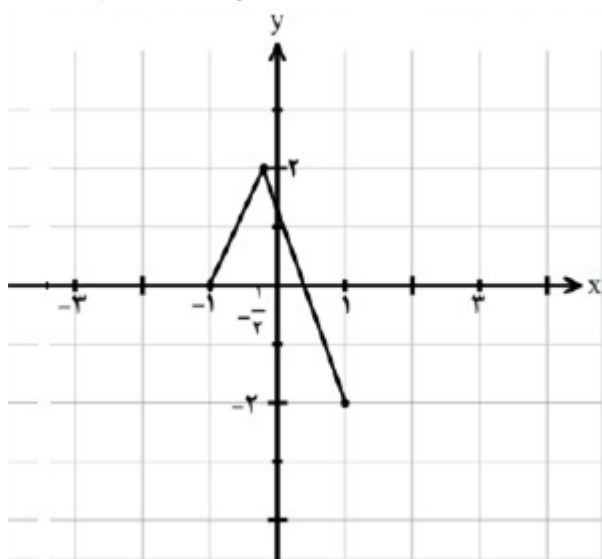
روش دوم: (انتقال نقاط)

$$\begin{aligned} (-1, 0) &\rightarrow (-2, 0) \\ (0, 2) &\rightarrow (0, -6) \end{aligned}$$

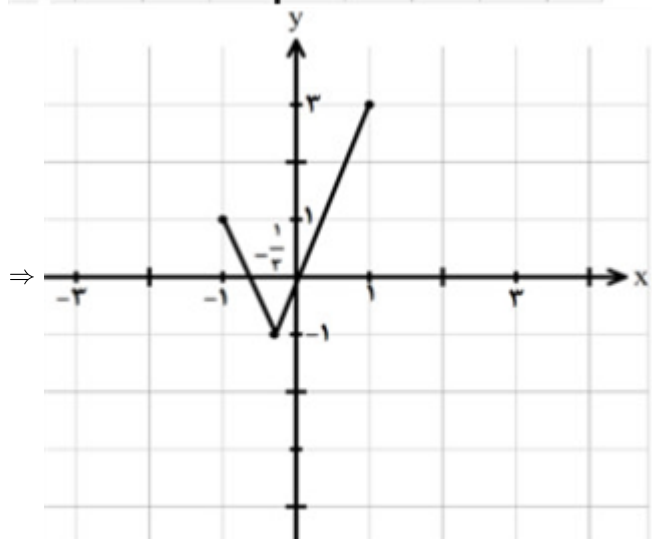
نمودار تابع f به صورت زیر است. نمودار تابع $y = -f(3x) + 1$ را رسم کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳



پاسخ: ۱



جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.
باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $2x^3 - 5x + 1$ بر $x + 1$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۳



۱۲

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- اگر تابعی یک به یک باشد، آنگاه اکیداً یکنوا است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست

۱۳

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- دامنه تابع‌های $y = -2f(x) + 4$ و $y = \frac{1}{5}f(x)$ با یکدیگر برابر است.

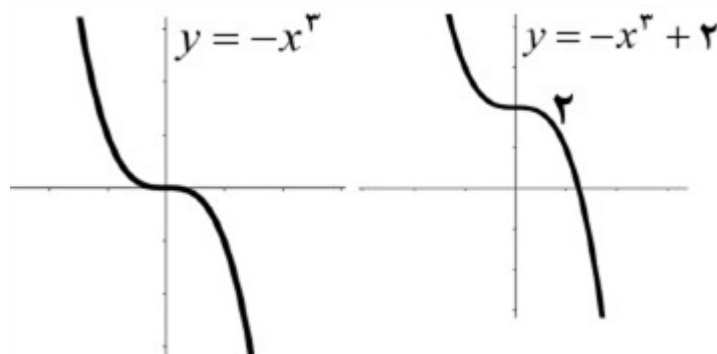
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست

۱۴

نمودار تابع $y = -x^3 + 2$ را رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳



پاسخ: ۱ تابع اکیداً نزولی است.

۱۵

جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.
در تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر $x + 2$ ، باقی مانده تقسیم برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ صفر

۱۶

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- تابع $y = f(x)$ با دامنه R مفروض است. برد تابع‌های $y = f(3x)$ و $y = f(5x)$ یکسان است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست

۱۷

اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - k$ بخش‌پذیر باشد، مقدار k را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$x - k = 0 \Rightarrow x = k \Rightarrow p(k) = 0 \Rightarrow k^3 + k^2 + 2 = 0 \Rightarrow k^3 = -1 \Rightarrow k = -1$$

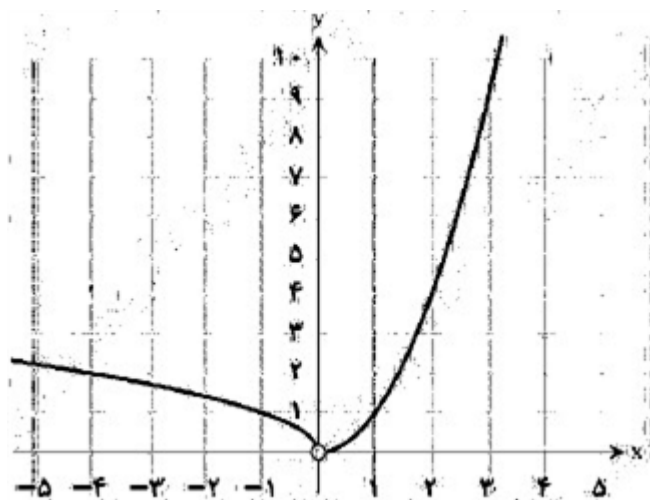
پاسخ: ۱



۱۸ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کنید. بزرگ‌ترین بازه‌ای که این تابع در آن اکیداً صعودی است را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۱ پاسخ: در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



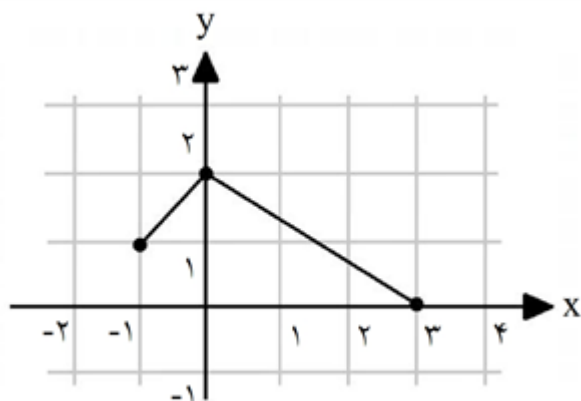
۱۹ اگر دامنه تابع g بازه $[-2, 2]$ باشد، آنگاه دامنه تابع $k(x) = 3g(-2x)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$D_k = [-2, 1]$$

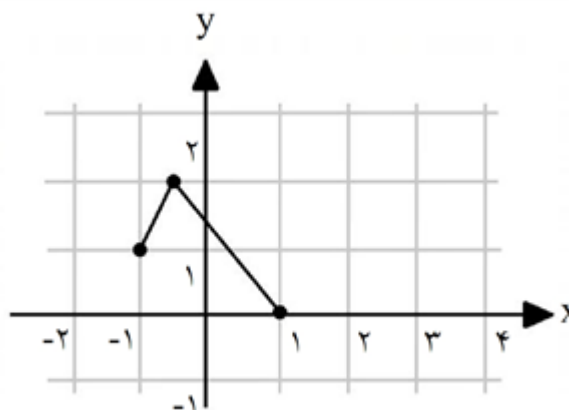
۱ پاسخ:

۲۰ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ را به کمک آن رسم کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۱ پاسخ: ابتدا نقاط مشخص شده در نمودار f را در راستای محور طول‌ها یک واحد به سمت چپ منتقل کرده، سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. یا (نقاط با استفاده از محاسبه به دست آورده شود).



۲۱

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

- اگر نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در راستای محور x ها، دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم و آن را $g(x)$ بنامیم، آنگاه نمودار تابع $g^{-1}(x)$ از ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ دوم

۲۲

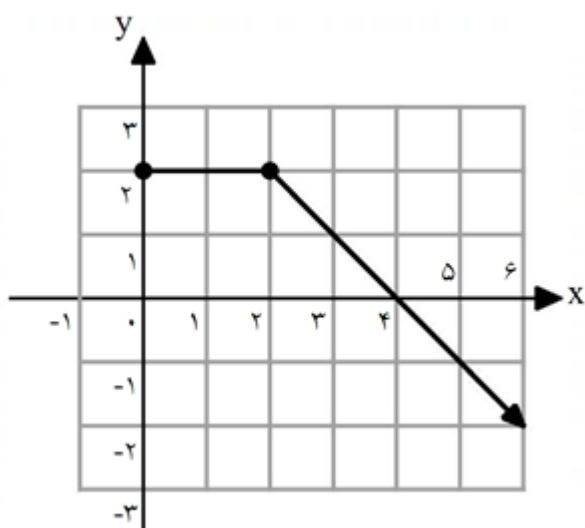
درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- اگر n عدد طبیعی زوج و a عدد حقیقی باشد، آنگاه چندجمله‌ای $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش‌پذیر است.

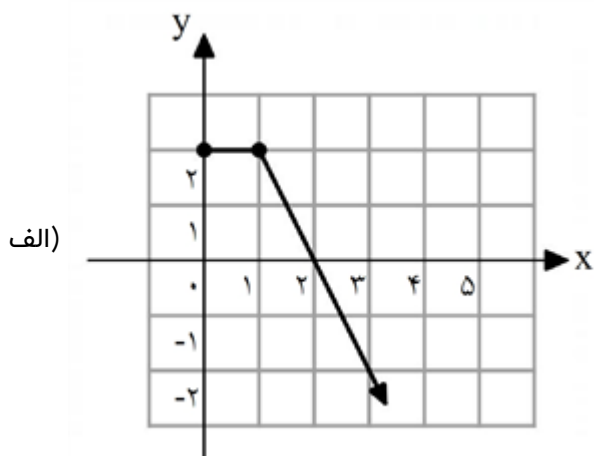
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست

۲۳

در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است.الف) نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(2x)$ را رسم کنید.ب) مقدار $\text{gof}(\cdot)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳



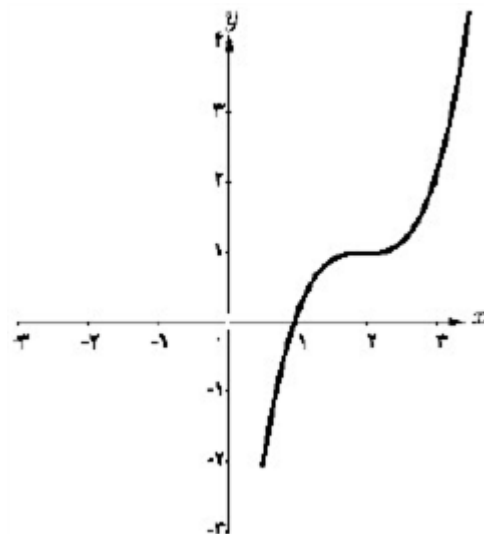
$$\text{ب) } g(f(\cdot)) = g(2) = \cdot$$

پاسخ: ۱



۲۴ به کمک انتقال نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳



پاسخ: ۱

۲۵ جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.
تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ ۲

۲۶ اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + mx + 2$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 1$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

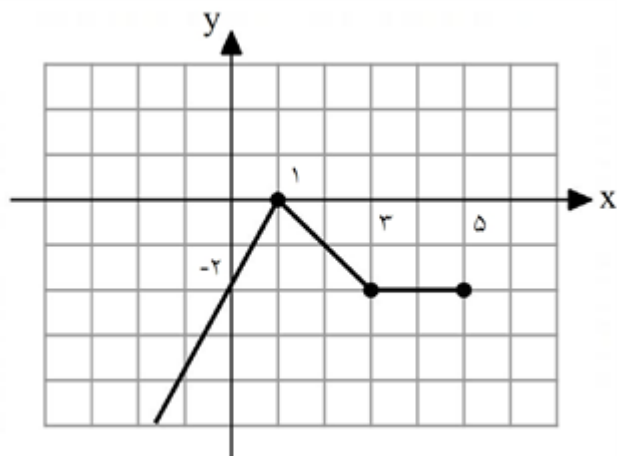
$$p(2) = 0 \Rightarrow 8 + 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = -5$$

$$p(-1) = 6$$

پاسخ: ۱

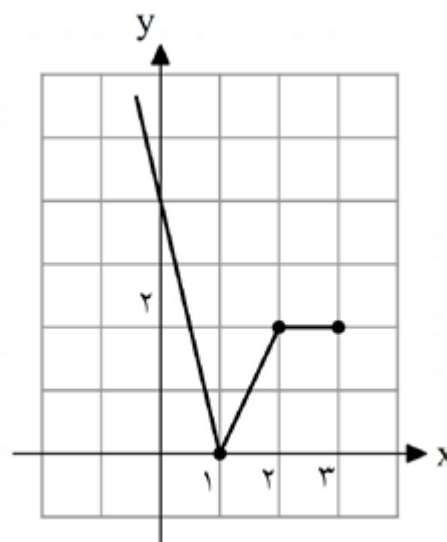


نمودار تابع $f(x)$ در مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = -f(2x - 1)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ دامنه: $(-\infty, 3]$
برد: $[0, +\infty)$



۲۸ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید. نمودار f^{-1} از ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ چهارم

۲۹ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

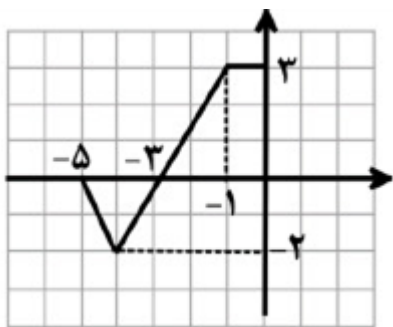
- اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، تابع $f + g$ نیز در آن فاصله اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست



نمودار تابع f به صورت مقابل است.
دامنه و برد تابع $g(x) = 2f(-x)$ را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$D_g = [0, 5], R_g = [-4, 6]$$

پاسخ: ۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ بر $x - 1$ برابر ۲ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ از انقباض افقی نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 3x^2 + mx + 2m + 1$ بر $x - 2$ برابر ۳ باشد، باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x) = mx^2 - mx + 3$ بر $x + 2$ را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

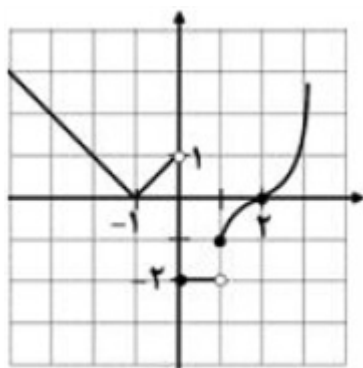
$$p(2) = 3 \Rightarrow 12 + 2m + 2m + 1 = 3 \Rightarrow 4m = -10 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

پاسخ: ۱

$$f(-2) = -\frac{5}{2}(-2)^2 - \left(-\frac{5}{2}\right)(-2) + 3 = -12$$

ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

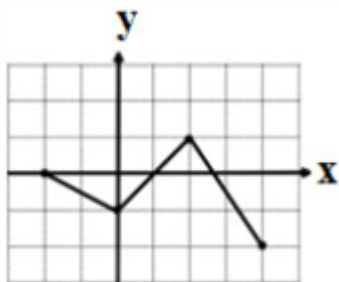


اکیدا صعودی $[1, +\infty)$ و $(-1, 0)$
اکیدا نزولی $(-\infty, -1]$

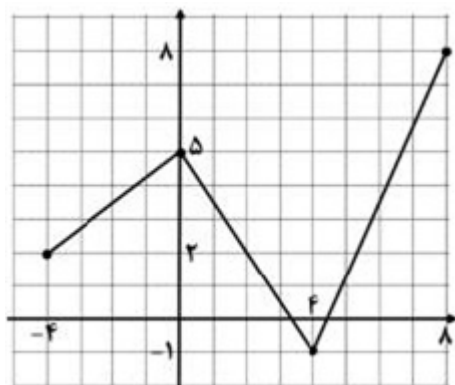
پاسخ: ۱

۳۵

نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $g(x) = -3f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ را رسم کرده و سپس برد تابع $g(x)$ را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲



$$R = [-1, 8]$$

پاسخ: ۱

نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم، ضابطه تابع جدید را بنویسید.

۳۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$y = 2\sqrt{x-3}$$

پاسخ: ۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

۳۷

- تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

۳۸

- تابع $y = \sqrt[3]{x} - \pi x + 1$ یک تابع چندجمله‌ای است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست

مقادیر a و b را چنان بیابید که عبارت $p(x) = x^2 - ax + b$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر باشد و باقیمانده تقسیم آن بر $(x+1)$ برابر ۳ باشد.

۳۹

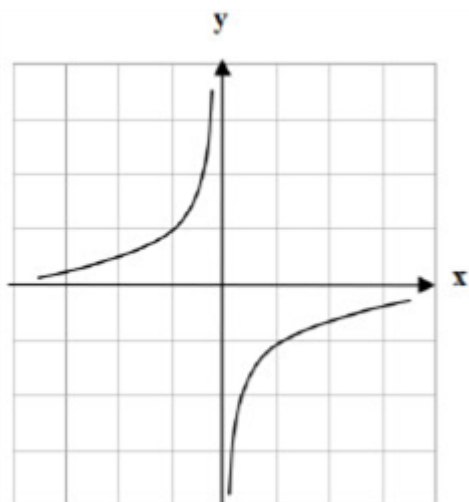
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$\begin{aligned} P(2) = 0 &\Rightarrow 4 - 2a + b = 0 \\ P(-1) = 3 &\Rightarrow a + b = 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -4 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

پاسخ: ۱



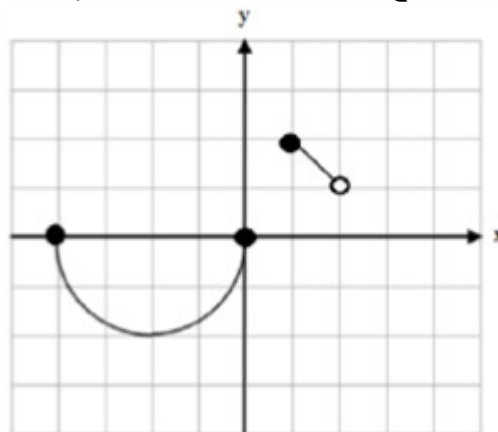
با توجه به نمودار تابع مقابل، تعیین کنید:
الف) تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً یکنوا است.
ب) آیا تابع در کل دامنه خود اکیداً یکنوا است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

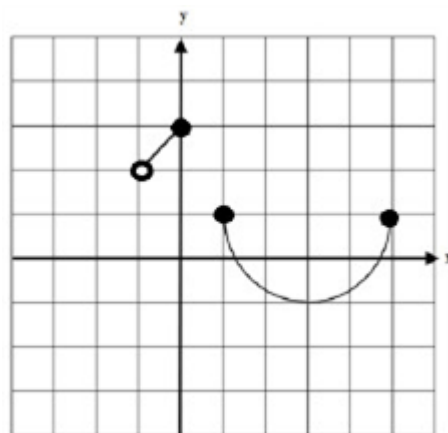
پاسخ: ۱ الف) اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) و $(-\infty, 0)$ اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)
ب) خیر، در کل دامنه اکیداً یکنوا نیست.

نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. ۴۱



نمودار تابع $y = f(1-x) + 1$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲



پاسخ: ۱

۴۲

جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.

اگر برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازه $[0, 2]$ باشد، برد تابع $y = 2 + \sqrt{x-2}$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $[2, 4]$

۴۳

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- عبارت $x^4 + 1$ بر $x + 1$ بخش پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

۴۴

در جای خالی عبارت مناسب را قرار دهید.

نقطه $(-2, 4)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ می باشد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y = f(2x)$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $(-1, 4)$

۴۵

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- بی شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست

۴۶

اگر چند جمله ای $x^2 + ax - 8$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$x = a \Rightarrow 2a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

پاسخ: ۱

۴۷ اگر $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{125}$ باشد، حدود x را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow 2x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 1 \quad (\text{ص ۲۲})$$

پاسخ: ۱



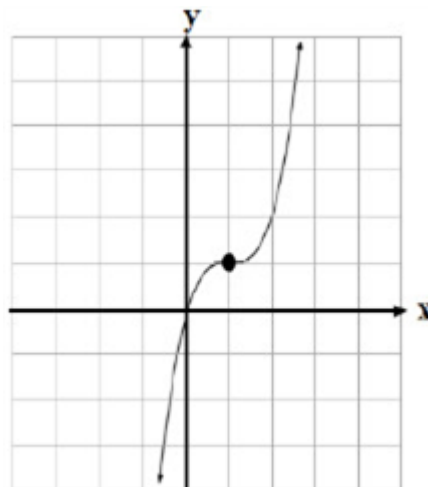
نمودار تابع $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک انتقال نمودار $f(x) = x^3$ رسم کنید، سپس اکیداً یکنوایی تابع $g(x)$ را در تمام دامنه خود، بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x - 1)^3 + 1$$

پاسخ: ۱

اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)



اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $(-1, 3]$ و برد آن $(0, 2]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$D_{f\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} \leq 3 \Rightarrow D_{f\left(\frac{x}{2}\right)} = (-2, 6]$$

پاسخ: ۱

برد تغییر نمی‌کند.

عبارت $\frac{x^5 + 1}{x + 1}$ را ساده کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$\frac{x^5 + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{x + 1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

پاسخ: ۱

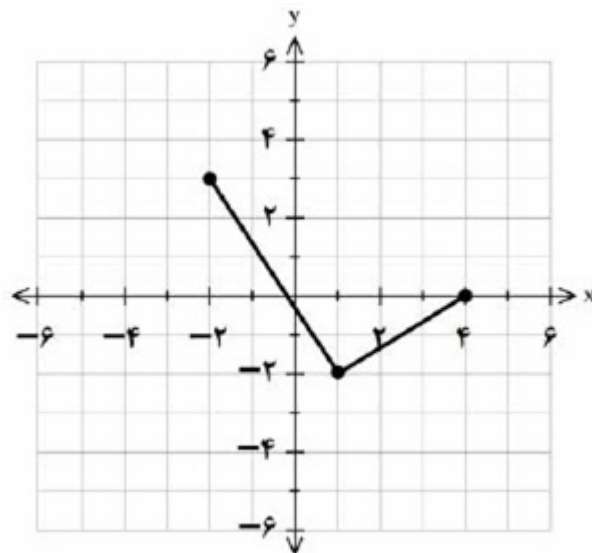
در چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ برابر -1 و $P(x)$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$\begin{cases} p(-2) = -1 \\ p(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 7 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{8}{3}, b = -\frac{11}{3}$$

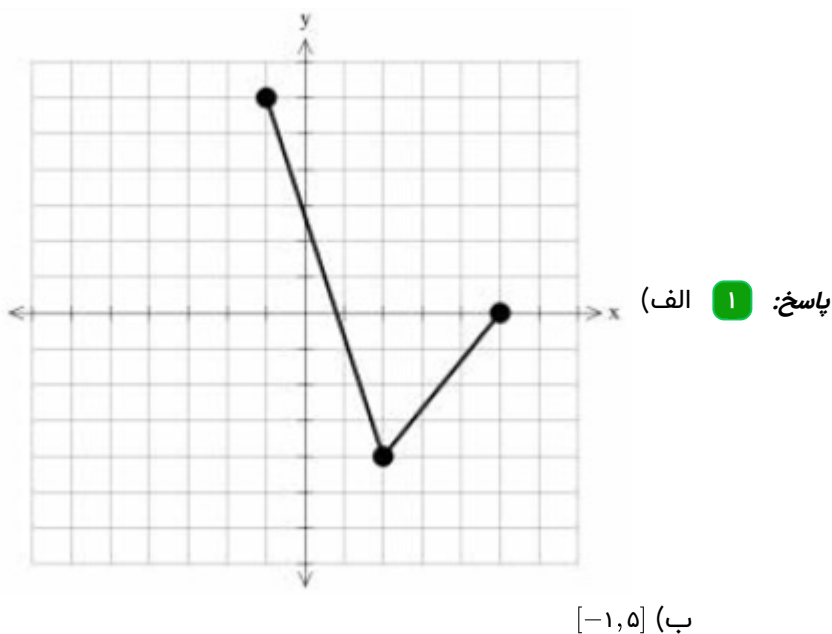
پاسخ: ۱





الف) نمودار تابع $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کنید.
 ب) دامنهٔ تابع g را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱



۵۳ چندجمله‌ای $x^5 + 32$ را برحسب عامل $x + 2$ تجزیه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$(x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

پاسخ: ۱

۵۴ اگر $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{27}\right)$ باشد، حدود x را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow 2x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$$

پاسخ: ۱



۵۵ اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^2 + kx^2 - 3$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، k را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

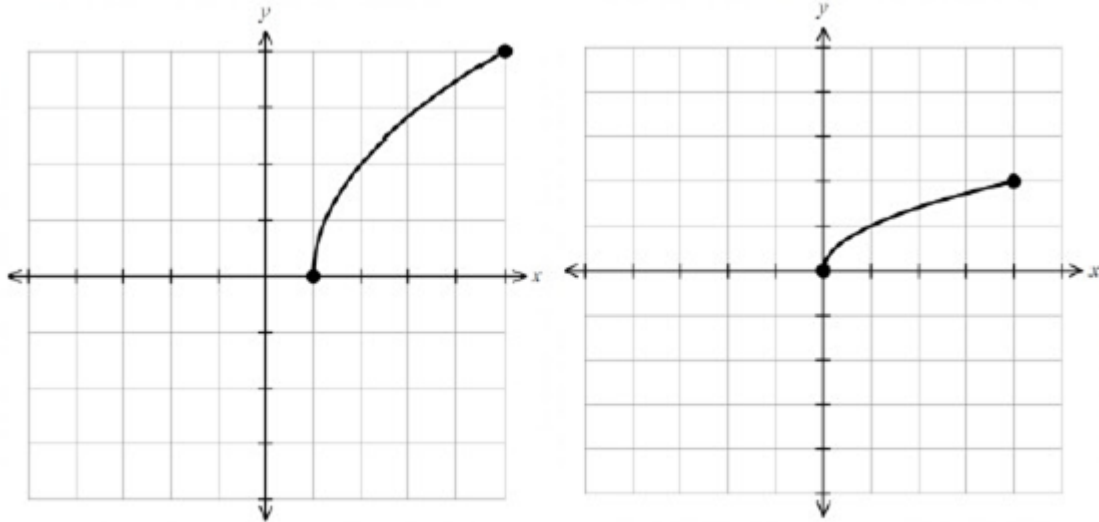
$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow p(-1) = 2 \Rightarrow (-1)^2 + k(-1)^2 - 3 = 2 \Rightarrow k = 4$$

پاسخ: ۱

۵۶ الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه $[0, 4]$ رسم کنید.

ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x) = 2f(x - 1)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱



پاسخ: ۱

ب

الف

$$R_g = [0, 4], D_g = [1, 5]$$

۵۷ جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

- اگر تابعی در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع در آن فاصله است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ ثابت

۵۸ برد تابع f بازه‌ی $[-3, 1]$ است. برد تابع $y = -2f(3x - 1) + 3$ کدام یک از موارد زیر است؟

۴ $[-10, 2]$

۳ $[1, 9]$

۲ $[-12, 0]$

۱ $[-8, 0]$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-3 < f(3x - 1) \leq 1 \xrightarrow{\times(-2)} -2 \leq -2f(3x - 1) < 2 \xrightarrow{+3} 1 \leq y < 4$$

۵۹ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

- باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 5x + 1$ بر $x - 3$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ ۴

۶۰ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ نادرست



۶۱ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- تابع $f(x) = x^3$ ، تابعی اکیداً صعودی است.

پاسخ: ۱ درست

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۶۲ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- تابع $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ یک تابع درجه دوم است.

پاسخ: ۱ درست

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۶۳ باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.

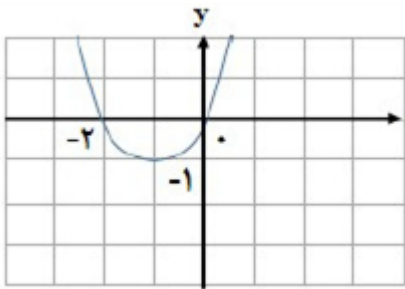
پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 = r$$

۶۴ ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمایید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

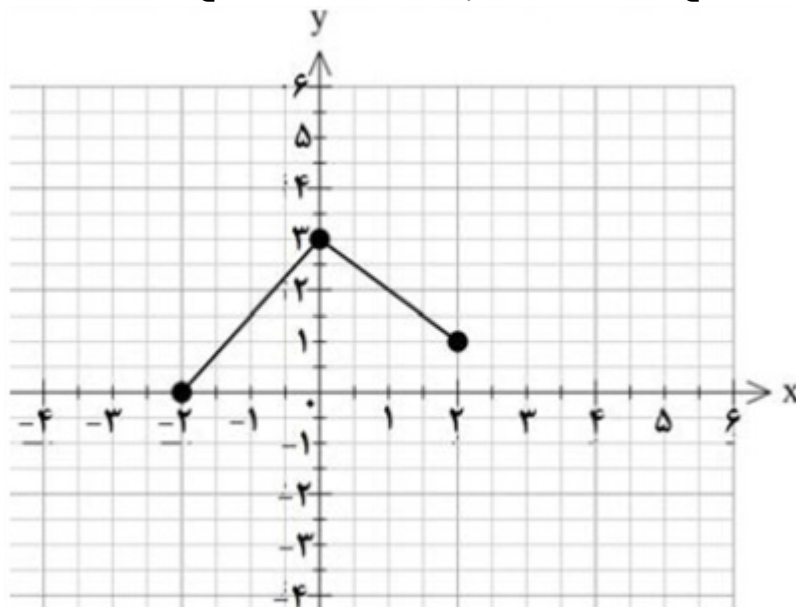


اکیدا صعودی $[-1, +\infty)$
اکیدا نزولی $(-\infty, -1]$

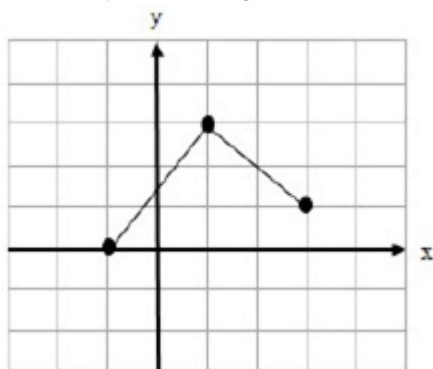
پاسخ: ۱



نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱



$$D_g = [-1, 3]$$

پاسخ: ۱

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ بر $(x+2)$ و $(x-1)$ بخش‌پذیر باشد.

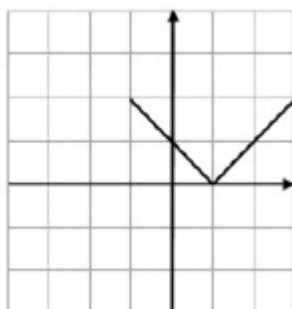
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$\begin{aligned} -8 + 4a - 2b + 2 &= 0 \Rightarrow 4a - 2b = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2} + \frac{b}{2} \\ 1 + a + b + 2 &= 0 \Rightarrow a + b = -3 \Rightarrow b = -3 - a \end{aligned}$$

پاسخ: ۱

ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x-1|$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

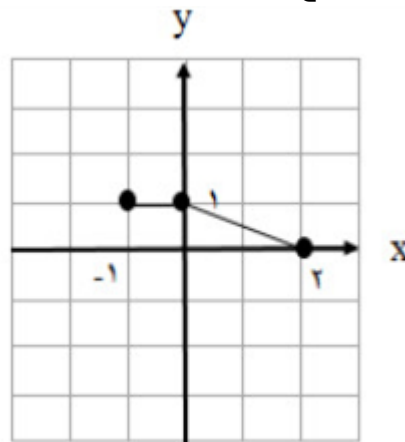


اکیدا صعودی $[1, +\infty)$

اکیدا نزولی $(-\infty, 1]$

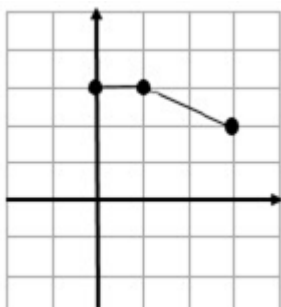
پاسخ: ۱

۶۸ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است.



نمودار $g(x) = f(x - 1) + 2$ را رسم کرده و دامنه تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

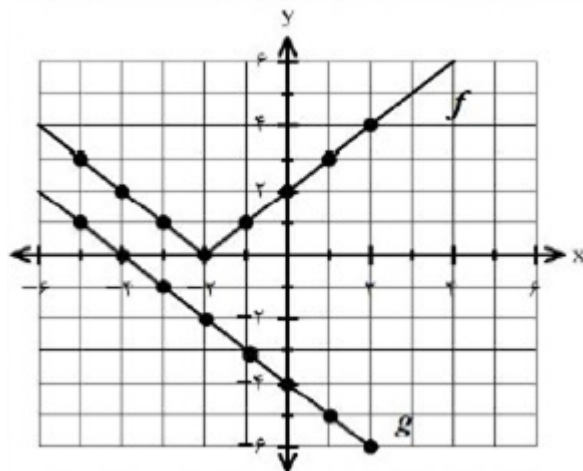
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰



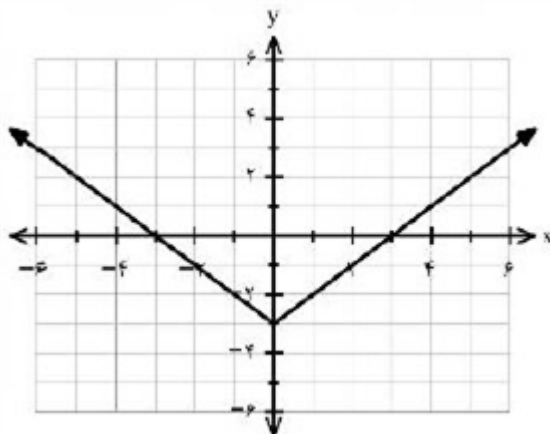
$$D_g = [0, 3]$$

۱ پاسخ:

۶۹ نمودار تابع $g(x) = f(x - 2) - 3$ را رسم کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰



۱ پاسخ:



۷۰

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید.

- چند جمله‌ای $p(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله‌ای بخش‌پذیر است. $((x+1), (x-1))$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ $(x+1)$

۷۱

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید.

- نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(0, 1)$ ، از نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد. (بالا تر - پایین تر)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ پایین تر

۷۲

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

۷۳

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ نادرست

۷۴

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله‌ی آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه‌ی نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

مرحله ۱	مرحله ۲	مرحله ۳
$f(x) - 2 = (x-1)^2 - 2$	$f(x+1) - 2 = x^2 - 2$	$-f(x+1) + 2 = -x^2 + 2$

پاسخ: ۱

۷۵

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- دامنه توابع چندجمله‌ای برابر R است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

۷۶

در $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} \leq \left(\frac{1}{81}\right)$ حدود x را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$3^{2x-10} \leq 3^{-4}$$

پاسخ: ۱

$$2x - 10 \leq -4 \Rightarrow x \leq 3$$

۷۷

چند جمله‌ای $x^7 + 128$ را برحسب عامل $(x+2)$ تجزیه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$x^7 + 2^7 = (x+2)(x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64)$$

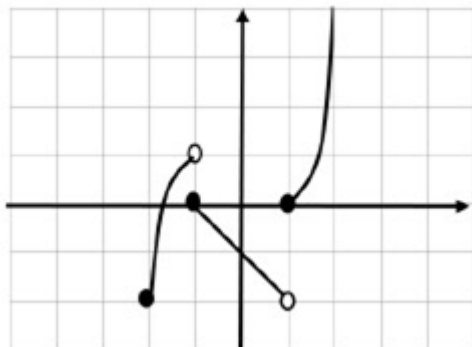
پاسخ: ۱



۷۸

با رسم نمودار $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & -2 \leq x < -1 \\ -x - 1 & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & 1 \leq x \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

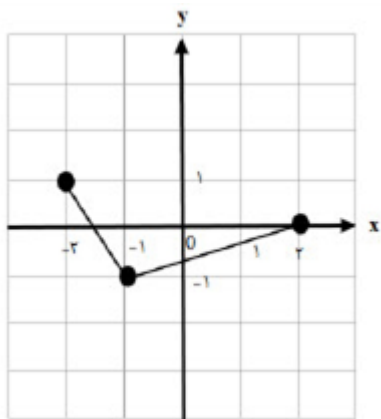


صعودی $[-2, -1)$ ، صعودی $[1, +\infty)$ ، نزولی $[-1, 1)$

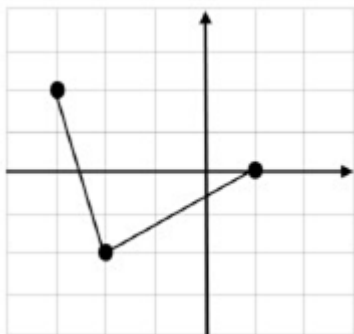
پاسخ: ۱

۷۹

نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰



$D_f = [-2, 1]$
 $R_f = [-2, 2]$

پاسخ: ۱

۸۰

جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ انقباض افقی

۸۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- تابع $y = -\log_5 x + 1$ در دامنه خود، یک تابع اکیداً یک‌نوا است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست



۸۲ باقیمانده تقسیم عبارت‌های $p(x) = x^3 + ax + 1$ و $q(x) = 2x^2 - x + 1$ بر $(x + 2)$ یکسان می‌باشد. مقدار a را بیابید.

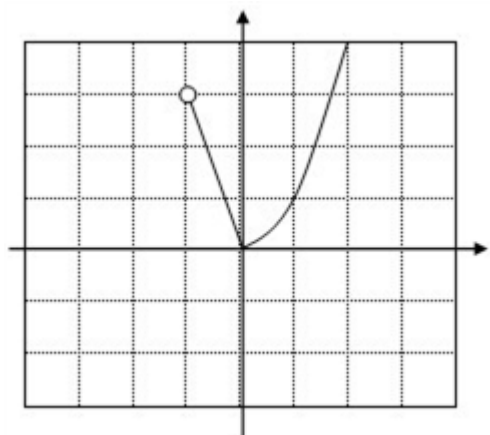
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \begin{cases} p(-2) = -2a - 7 \\ q(-2) = 11 \end{cases} \Rightarrow a = -9$$

پاسخ: ۱

۸۳ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی می‌باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

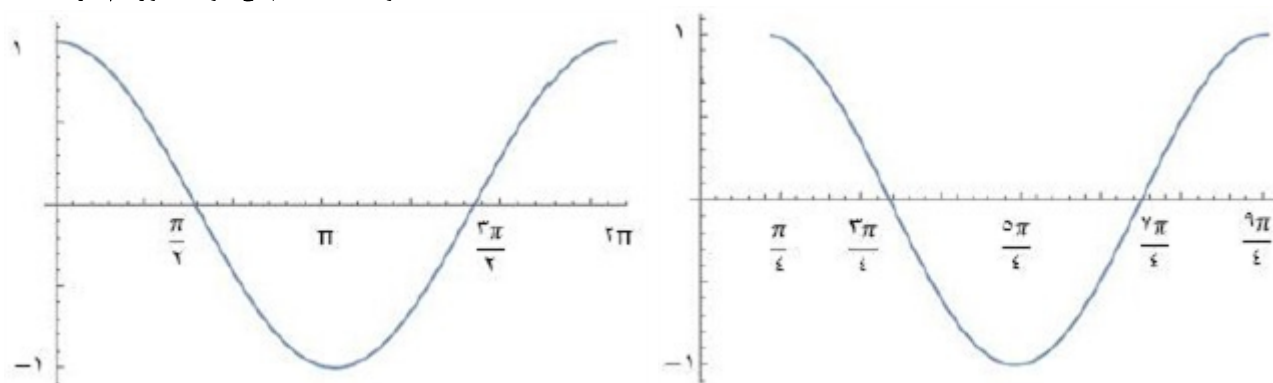


اکیدا نزولی $(-1, 0]$
اکیدا صعودی $[0, +\infty)$

پاسخ: ۱

۸۴ نمودار تابع $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰



پاسخ: ۱

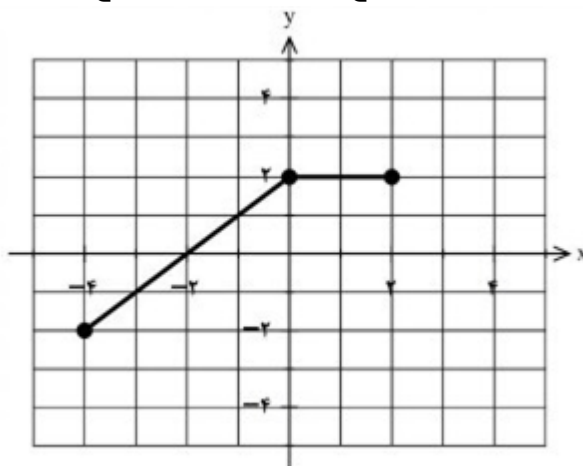
۸۵ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.
- به تابعی که در یک بازه صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

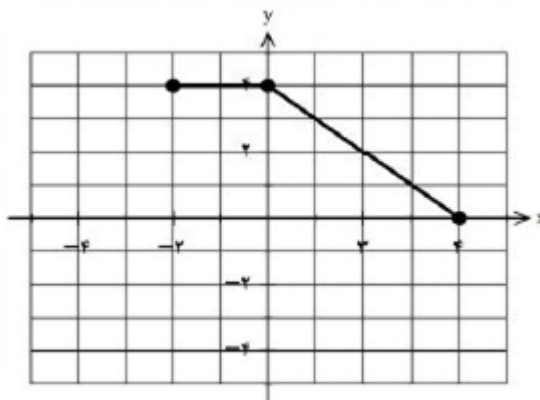
پاسخ: ۱ یکنوا



با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰



پاسخ: ۱

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ $[-1, 1]$

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
در تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - a$ ، باقیمانده برابر $p(a)$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
دامنه تابع با ضابطه‌ی $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
تابع $f(x)$ در بازه شامل a, b صعودی است. اگر $f(a) \geq f(b)$ آن‌گاه $a \leq b$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست



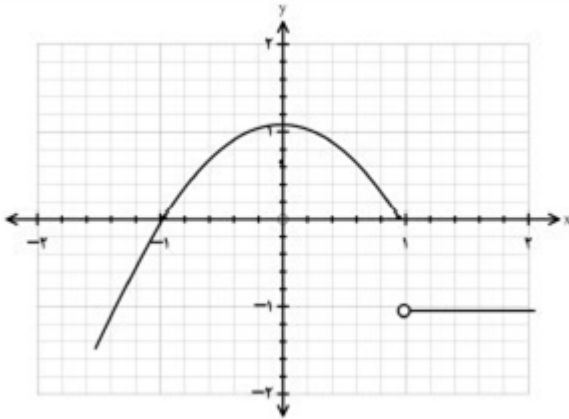
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

پاسخ: ۱

۹۲ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد.

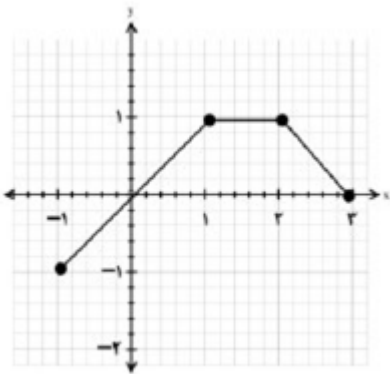
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹



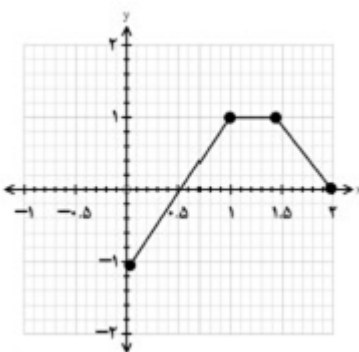
صعودی $(-\infty, 0]$ و $(1, +\infty)$
نزولی $[0, +\infty)$

پاسخ: ۱

۹۳ نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x - 1)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹



$$D_g = [0, 2] \quad R_g = [-1, 1]$$

پاسخ: ۱

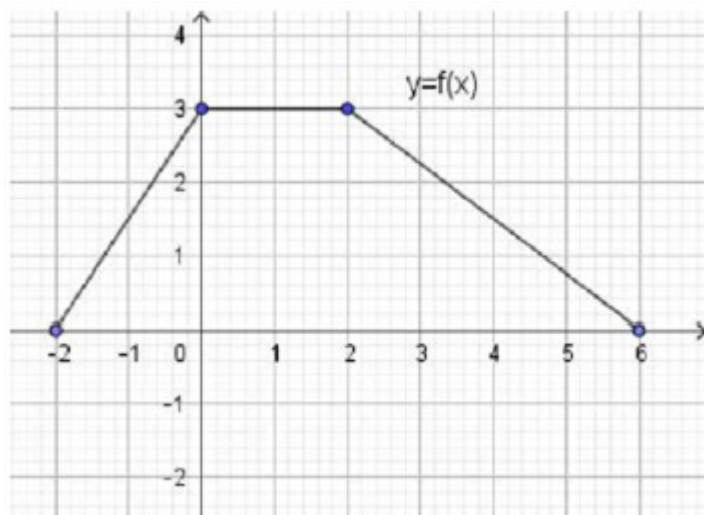
۹۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را بنویسید.
اگر تابع f در یک بازه نزولی اکید باشد، در این بازه نزولی نیز هست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

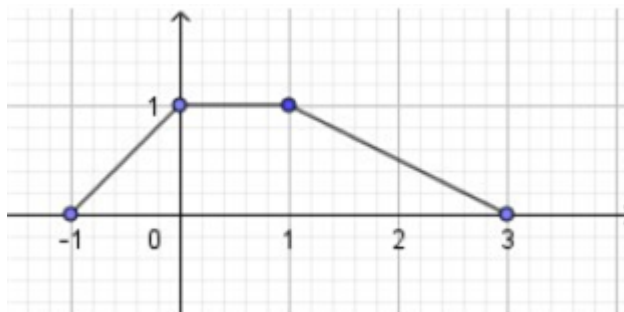


نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.



نمودار تابع $y = \frac{1}{3}f(2x)$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹



پاسخ: ۱

در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.
توابع اکیداً یک‌نوا، همواره هستند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ یک‌نوا

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y = kf(x)$ همان دامنه‌ی تابع $y = f(x)$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x) = x^2 + ax^2 + bx - 2$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x + 1)$ برابر ۳ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow p(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -6$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow p(-1) = 3 \Rightarrow a - b = 6$$

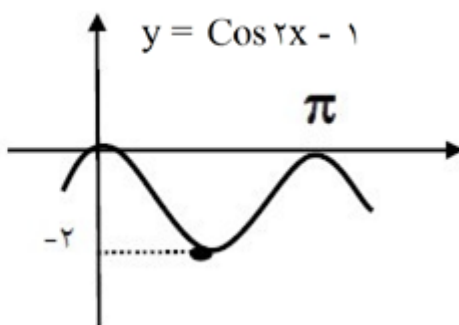
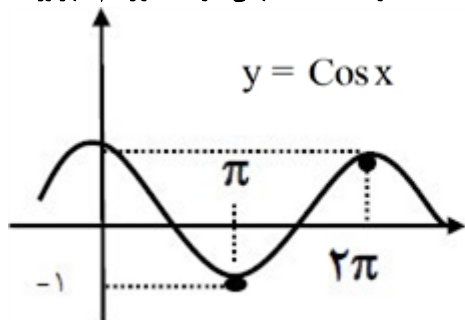
$$a = 1, b = -5$$

پاسخ: ۱



$$y = \cos 2x - 1$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹



پاسخ: ۱

۱۰۰

در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید.
اگر بازه $[-2, 1]$ دامنه تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(3x + 1)$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ $[-1, 0]$

۱۰۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را بنویسید.
چندجمله‌ای $P(x) = (2 - x)^2(x + 1)^3$ یک چندجمله‌ای از درجه ۵ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

۱۰۲

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه اکیدا صعودی نیز خواهد بود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

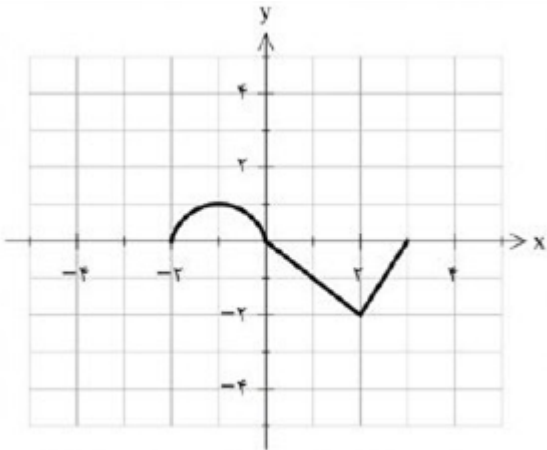
پاسخ: ۱ نادرست



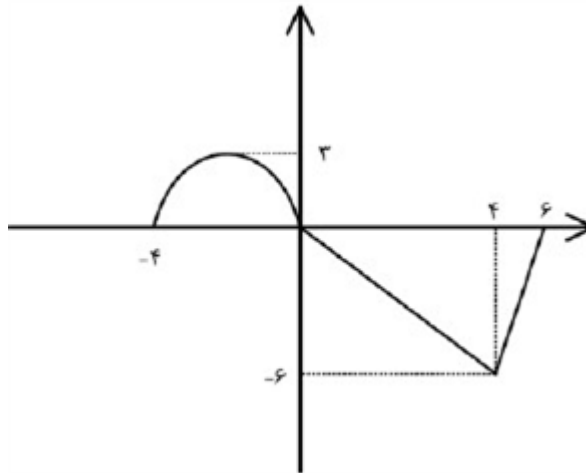
۱۰۳ نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.

الف) نمودار تابع $y = 3f\left(\frac{1}{3}x\right)$ را رسم کنید.

ب) دامنه تابع $y = 3f\left(\frac{1}{3}x\right)$ را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹



پاسخ: ۱ الف)

ب) $D = [-4, 6]$

۱۰۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

۱۰۵ مقدار a, b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow p(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow p(-1) = 0 \Rightarrow a - b = 0$$

$$a = -\frac{9}{3}, b = -\frac{9}{3}$$

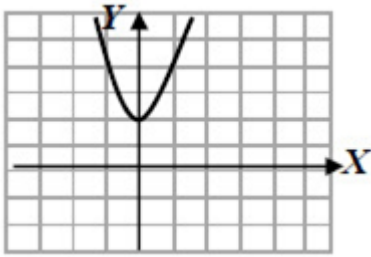
پاسخ: ۱



۱۰۶

نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه‌ای این تابع اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

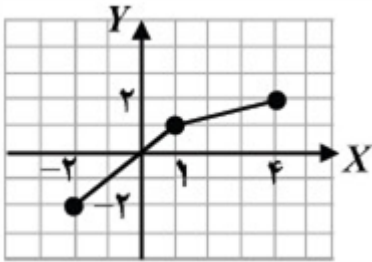


اکیدا نزولی $(-\infty, 0)$
اکیدا صعودی $(0, +\infty)$

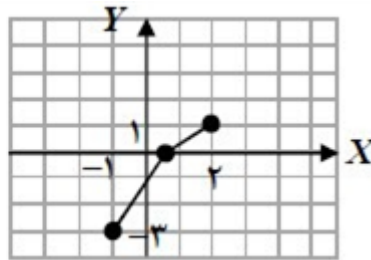
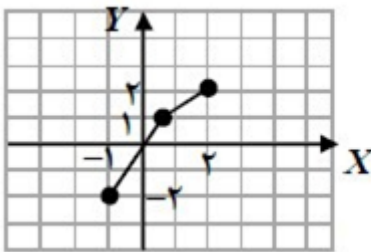
پاسخ: ۱

۱۰۷

با توجه به نمودار تابع f که در شکل مقابل آمده است، نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹



$$D_g = [-1, 2]$$

$$R_g = [-3, 1]$$

پاسخ: ۱

۱۰۸

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
چند جمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دو جمله‌ای $x + 2$ بخش پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ درست

۱۰۹

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع نامیده می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ ثابت

۱۱۰

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
برد تابع با ضابطه‌ی $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ نادرست



۱۱۱ در چند جمله‌ای $p(x) = x^2 + ax^2 + b$ مقادیر a, b را چنان بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ برابر با ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش‌پذیر باشد.

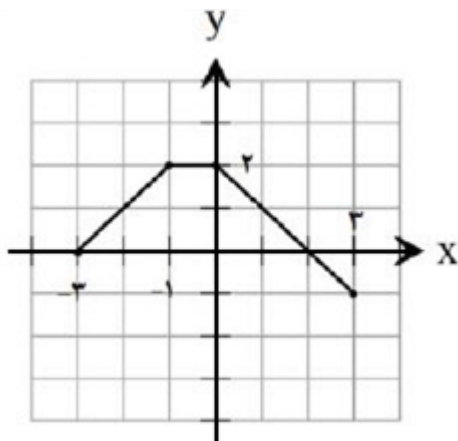
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow p(1) = 4 \Rightarrow a + b = 3$$

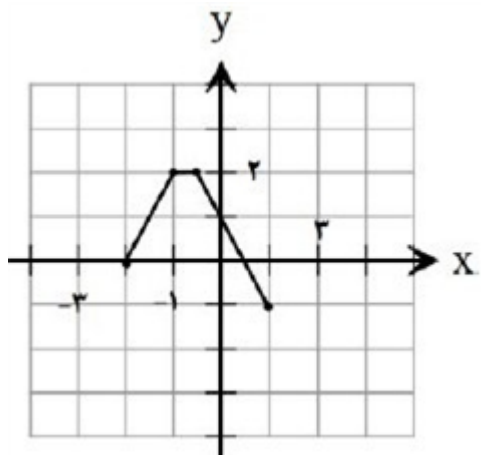
پاسخ: ۱

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow p(-2) = 0 \Rightarrow 4a + b = 8 \Rightarrow a = \frac{5}{3}, b = \frac{4}{3}$$

۱۱۲ نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(2x + 1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸



$$R = [-1, 2], D = [-2, 1]$$

پاسخ: ۱

۱۱۳ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ باشد، حدود x برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ $\left[\frac{8}{3}, +\infty\right)$

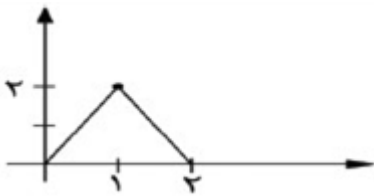
۱۱۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در یک بازه نزولی باشد، آن‌گاه در این بازه اکیداً نزولی نیز می‌باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ نادرست

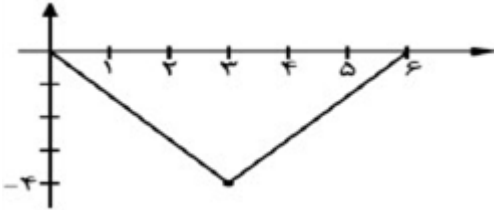


۱۱۵ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. با استفاده از آن نمودار $y = -2f\left(\frac{1}{3}x\right)$ را رسم کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاسخ: ۱



۱۱۶ درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.
تابع $y = -x^3 + 2$ در دامنه‌ی تعریفش صعودی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاسخ: ۱ نادرست

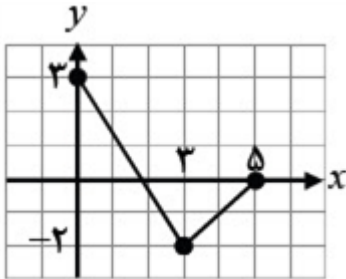
۱۱۷ اگر $\text{Log}(x+1) \leq \text{Log}(2x-3)$ ، حدود x را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

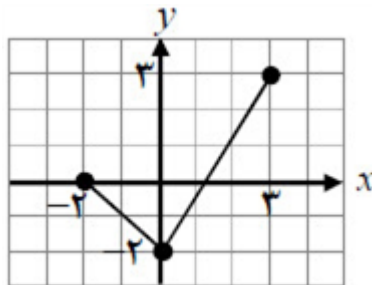
$$x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow x \geq 4$$

پاسخ: ۱

۱۱۸ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(3-x)$ را رسم کرده و دامنه آن را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸



$$D_g = [-2, 3]$$

پاسخ: ۱

۱۱۹ تابع $h(x) = |x+2|$ در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$(-2, +\infty)$$

پاسخ: ۱



۱۲۰ نمودار تابع $y = -f(x)$ ، قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به کدام محور است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

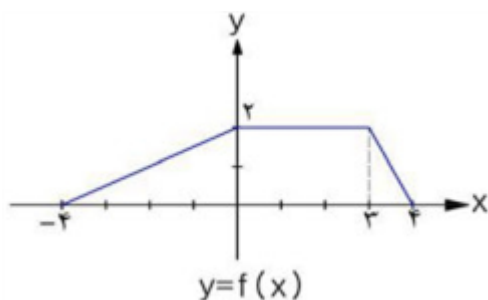
پاسخ: ۱ محور طولها

۱۲۱ درجه تابع $f(x) = x^2(1-x)^5$ را مشخص کنید.

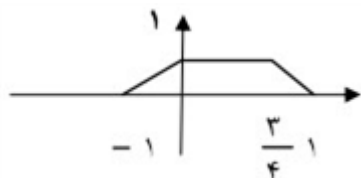
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاسخ: ۱ درجه هفت است.

۱۲۲ با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار $y = \frac{1}{2} f(2x)$ را رسم کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸



پاسخ: ۱

۱۲۳ در جای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.
تابع $y = (x+1)^2$ در دامنه‌ی تعریف خود (صعودی، نزولی) است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ صعودی ۰/۲۵

۱۲۴ چندجمله‌ای $x^6 - 1$ را بر حسب عامل $(x+1)$ تجزیه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ $x^6 - 1 = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)(0/5)$

۱۲۵ اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $(x+1)$ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)$ را به دست آورید.

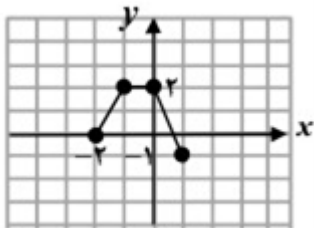
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ $f(-1) = 0(0/25) \Rightarrow 1 - a - 3 = 0 \Rightarrow a = -2(0/25)$

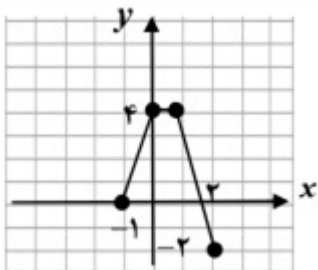
$f(2) = 4 - 4 - 3 = -3(0/25)$



نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸



(۰/۵)

$$D_g = [-1; 2] \quad (۰/۲۵)$$

$$R_g = [-2; 4] \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ: ۱

درست یا نادرست بودن عبارت زیر را تعیین کنید.

اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ نادرست (۰/۲۵)

سوال ۹۳

فصل دوم

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- دامنهٔ تابع $y = \tan x$ برابر با مجموعهٔ $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ نادرست

معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ روش اول:

$$2 \sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

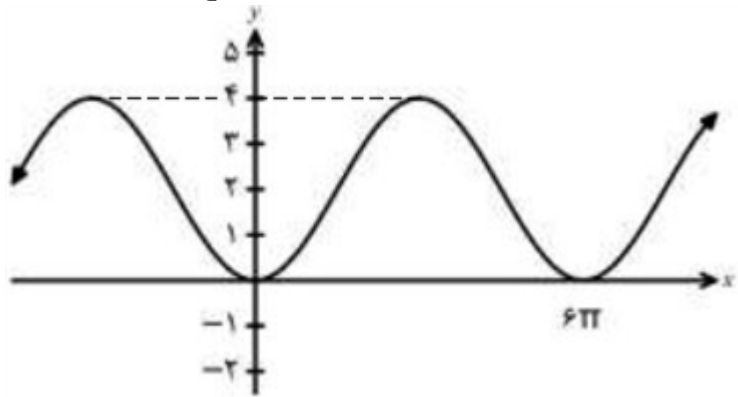
$$\frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

روش دوم:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

اگر دستهٔ دوم جواب به صورت $x = k\pi + \frac{3\pi}{8}$ نوشته شده باشد، نمره تعلق بگیرد.

نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos(bx) + 2$ یا $f(x) = a \sin(bx) + 2$ است. با دقت در شکل نمودار و محاسبه مقادیر a و b ، ضابطه مربوط به این تابع را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\begin{cases} |a| + 2 = 4 \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2 & \text{روش اول محاسبه مقدار } a \\ |a| = \frac{4 - 0}{2} = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2 & \text{روش دوم محاسبه مقدار } a \end{cases}$$

پاسخ: ۱

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \Rightarrow b = \frac{2\pi}{6\pi} = \pm \frac{1}{3}$$

$$f(x) = -2 \cos\left(\frac{x}{3}\right) + 2 \quad \text{تشخیص این که تابع کسینوسی است:}$$

* در صورتی که دانش آموز هر یک از موارد $|b| = \frac{1}{3}$ یا $b = \frac{1}{3}$ یا $b = -\frac{1}{3}$ را نوشته باشد، نمره تعلق گیرد.

توجه: در صورتی که دانش آموز ضابطه تابع را به صورت $f(x) = -2 \cos\left(-\frac{x}{3}\right) + 2$ بنویسد، نمره تعلق گیرد.

۱۳۱ اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ و $\tan \beta = -1$ باشد، آنگاه مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{\frac{2}{3} + (-1)}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)(-1)} = \frac{-1}{5}$$

پاسخ: ۱

۱۳۲ جوابهای کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x = 3 \sin x + 2$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$2 + 3 \sin x = 1 - 2 \sin^2 x \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۱۳۳ دوره تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = 2 - 3 \sin 4x$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\max = |-3| + 2 = 5, T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$$

پاسخ: ۱



۱۳۴ درست یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
تابع $f(x) = (1-x)^2$ ، تابعی اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ درست

۱۳۵ معادله $\cos x(2\cos x - 7) = 4$ را حل کنید.

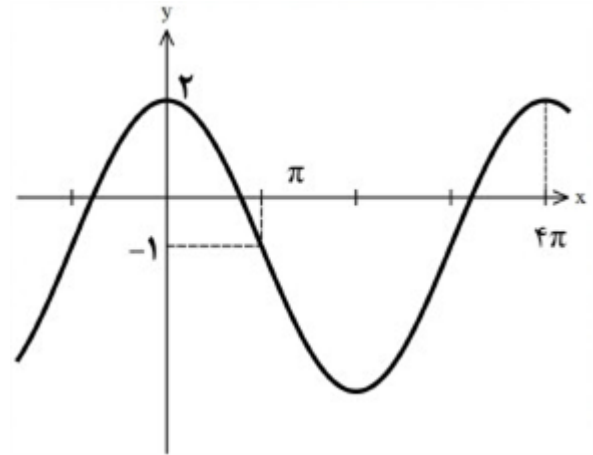
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱

$$\cos x(2\cos x - 7) = 4 \Rightarrow 2\cos^2 x - 7\cos x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 4 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

۱۳۶ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\cos bx + c$ به صورت زیر است. مقدار a ، b و c را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱

$$T = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

$$f(\pi) = -1 \Rightarrow a \cos(b\pi) + c = -1 \xrightarrow{|b|=\frac{1}{2}} a \times (-1) + c = -1 \Rightarrow c = -1$$

روش اول محاسبه a : $\max = 2 \Rightarrow |a| + c = 2 \xrightarrow{c=-1} |a| = 3 \xrightarrow{a>0} a = 3$

روش دوم محاسبه a : $f(0) = 2 \Rightarrow a + c = 2 \xrightarrow{c=-1} a = 3$

۱۳۷ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

برد تابع $y = \tan x$ با دامنه $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ $(-\infty, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ یا $R - (0, \sqrt{3})$

۱۳۸ مقدار مینیمم و دوره تناوب تابع $f(x) = c - 2\sin(bx)$ به ترتیب ۴ و $\frac{\pi}{2}$ است. مقادیر $|b|$ و c را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱

$$\min = -2 + c = 4 \Rightarrow c = 6$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4$$



۱۳۹ معادله مثلثاتی $\cos 2x - 3\cos x - 1 = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} \cos x = 2 & \text{غ ق ق} \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۱۴۰ جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.

تعداد جواب‌های معادله $\sin x = \frac{1}{3}$ در بازه $(0, \pi)$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ ۲

۱۴۱ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- بازه‌ای که تابع تانژانت در آن نزولی باشد، وجود ندارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست

۱۴۲ معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\cos 2x - 13\cos x - 6 = 0$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$2\cos^2 x - 1 - 13\cos x - 6 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 13\cos x - 7 = 0$$

پاسخ: ۱

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos x = +7 \end{cases}$$

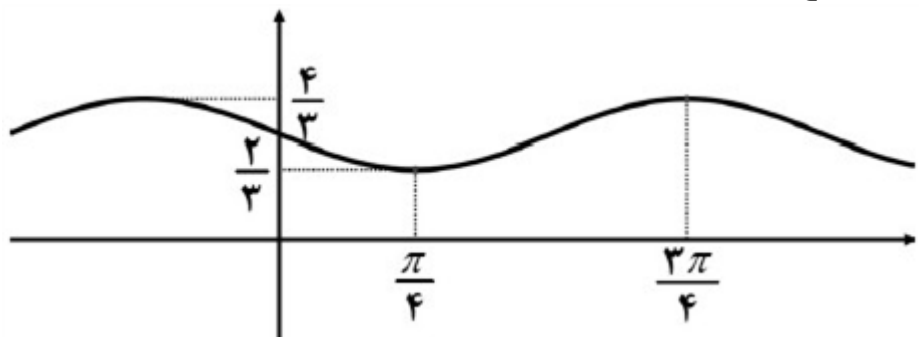
۱۴۳ با توجه به محورهای کسینوس و تانژانت، اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ باشد آنگاه مقادیر $\cos \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\tan \alpha > \cos \alpha$$

پاسخ: ۱

۱۴۴ نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ به صورت زیر است. ضابطه آن را مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\begin{cases} |a| + c = \frac{4}{3} \\ -|a| + c = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{\max + \min}{2} \\ |a| = \frac{\max - \min}{2} \end{cases} \Rightarrow c = 1, |a| = \frac{1}{3}$$

پاسخ: ۱

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \sin(2x + 1) \text{ یا } y = \frac{1}{3} \sin(-2x) + 1$$



۱۴۵ درست یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
تابع $y = \tan x$ در بازه $(\pi, 2\pi)$ صعودی است.

پاسخ: ۱ نادرست

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۱۴۶ معادلهٔ مثلثاتی $\tan 5x = \tan x$ را حل کنید. سپس جوابهایی از آن را که در بازهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارند، مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

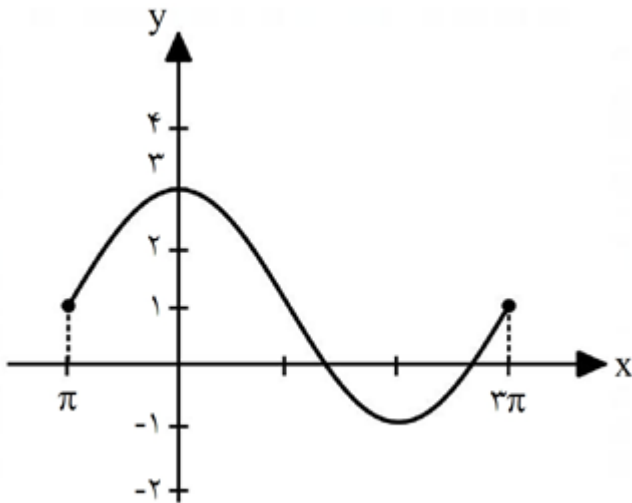
$$5x = k\pi + x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

پاسخ: ۱

(جوابهایی قابل قبول هستند که باقی‌مانده عدد صحیح k بر ۴ برابر ۲ نباشد.)
 $(k \in \mathbb{Z}, k \neq 4q + 2, q \in \mathbb{Z})$ یا اشاره شود که

$$k = 0 \Rightarrow x = 0, k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

۱۴۷ نمودار داده شده در شکل مقابل مربوط به تابع با ضابطهٔ $y = a \cos(bx) + c$ است. اگر $b < 0$ باشد، مقادیر a ، b و c را به دست آورید. (راه‌حل نوشته شود.)



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\begin{cases} |a| + c = 3 \\ -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ |a| = 2 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

پاسخ: ۱ روش اول:

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} c = \frac{\max + \min}{2} \Rightarrow c = 1 \\ |a| = \frac{\max - \min}{2} \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

روش دوم:

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{1}{2}$$

۱۴۸ درست یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

تابع $y = \tan x$ در مجموعهٔ $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ، اکیداً صعودی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست



۱۴۹ جواب‌های معادله $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ را در بازه $(0, \pi)$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

پاسخ: ۱

$$\xrightarrow{(0, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

۱۵۰ اگر بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = a \sin(\lambda x) + c$ به ترتیب ۹ و ۳ باشد.
الف) مقادیر $|a|$ و c را بیابید.
ب) دوره تناوب تابع را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

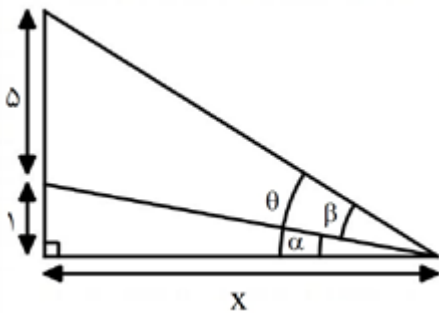
$$\text{الف) } |a| = \frac{\text{Max} - \text{Min}}{2} = \frac{9 - 3}{2} = 3$$

پاسخ: ۱

$$c = \frac{\text{Max} + \text{Min}}{2} = \frac{9 + 3}{2} = 6$$

$$\text{ب) } T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\lambda}$$

۱۵۱ نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه β و x به صورت زیر است:



$$\tan \beta = \frac{5x}{x^2 + 6}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\tan \beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{5}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{\frac{4}{x}}{\frac{x^2 + 5}{x^2}} = \frac{4x}{x^2 + 5}$$

پاسخ: ۱

(اگر دانش‌آموز از مفهوم شیب و رابطه $\tan \beta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ در حل مسئله استفاده کند، بارم این قسمت تعلق گیرد.)

۱۵۲ معادله $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

پاسخ: ۱ روش اول:

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

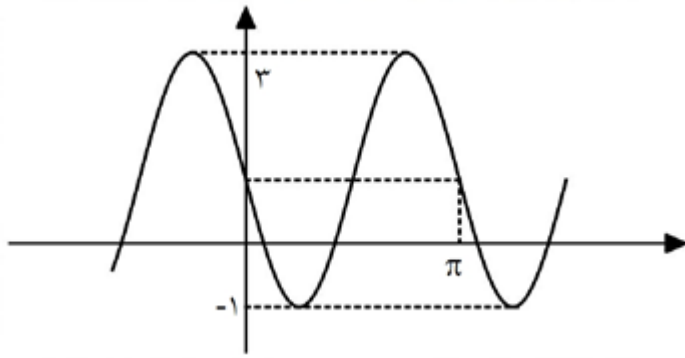
$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

روش دوم:



۱۵۳

نمودار داده شده در شکل مقابل مربوط به تابع با ضابطه $y = a \sin bx + c$ است. با فرض $a > 0$ ، مقادیر a ، b و c را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\begin{cases} c = 1 \\ |a| = 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2 \end{cases}$$

$$T = \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \xrightarrow{b < 0} b = -2$$

پاسخ: ۱

۱۵۴ جواب‌های معادله مثلثاتی $2 \sin 4x = 1$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ هستند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$\sin 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24}$$

$$4x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{24}, \frac{\pi}{24}$$

پاسخ: ۱

۱۵۵ مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = a \cos \frac{x}{2} + 3$ برابر ۶ می‌باشد، $|a|$ و دوره تناوب را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$|a| + 3 = 6 \Rightarrow |a| = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

پاسخ: ۱

۱۵۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

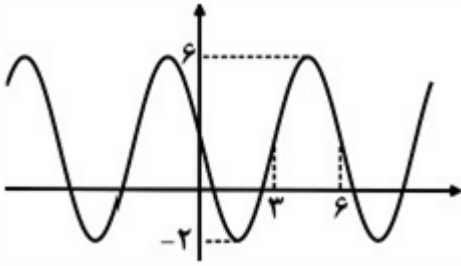
- فقط دو زاویه وجود دارد که مقدار کسینوس آن $\frac{2}{5}$ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست



نمودار مقابل مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \sin(bx) + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max = 6 \\ \min = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a| + c = 6 \\ -|a| + c = -2 \end{array} \right. \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow |a| = 4$$

$$y = a \sin bx + c \Rightarrow y = -4 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 2 \quad y = +4 \sin\left(-\frac{\pi}{3}x\right) + 2$$

پاسخ: ۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- تابع تانژانت در بازه $(-\pi, \pi)$ ، تابعی صعودی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- دوره تناوب تابع $y = 5 \cos \frac{x}{2} + 1$ برابر با 4π است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست

$$\text{معادله مثلثاتی } 2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ را حل کنید.} \quad ۱۶۰$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

پاسخ: ۱

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. ۱۶۱

$$y = \sqrt{3} - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow T = 4 \quad \text{Max : } |a| + c = 1 + \sqrt{3}$$

$$\text{Min : } -|a| + c = -1 + \sqrt{3}$$

پاسخ: ۱

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- خط $y = \frac{1}{2}$ ، نمودار تابع $y = \sin x$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ در یک نقطه قطع می‌کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست



۱۶۳ جواب‌های معادله مثلثاتی $۴\sin x + ۲\sqrt{۳} = ۰$ را در بازه $[۰, ۲\pi]$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$۴\sin x + ۲\sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right)$$

پاسخ: ۱

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{[۰, ۲\pi]} \begin{cases} x = \frac{۵\pi}{۳} \\ x = \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

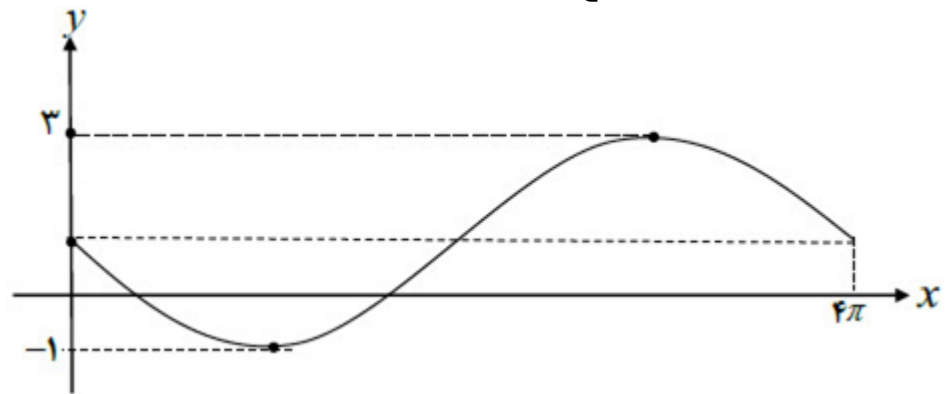
۱۶۴ جواب(های) معادله مثلثاتی $\cos ۲x - \cos x = ۰$ را در بازه $(۰, \pi)$ مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\cos ۲x = \cos x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{۲\pi}{۳}$$

پاسخ: ۱

۱۶۵ نمودار زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin bx + ۱$ است. حاصل ab را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \Rightarrow b = \pm \frac{۱}{۲}$$

$$|a| = \frac{۳ - (-۱)}{۲} = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲$$

پاسخ: ۱

با توجه به نمودار تابع، ab باید عدد منفی شود بنابراین $ab = -۱$

۱۶۶ معادله $\sin x \cos x = \frac{۱}{۴}$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

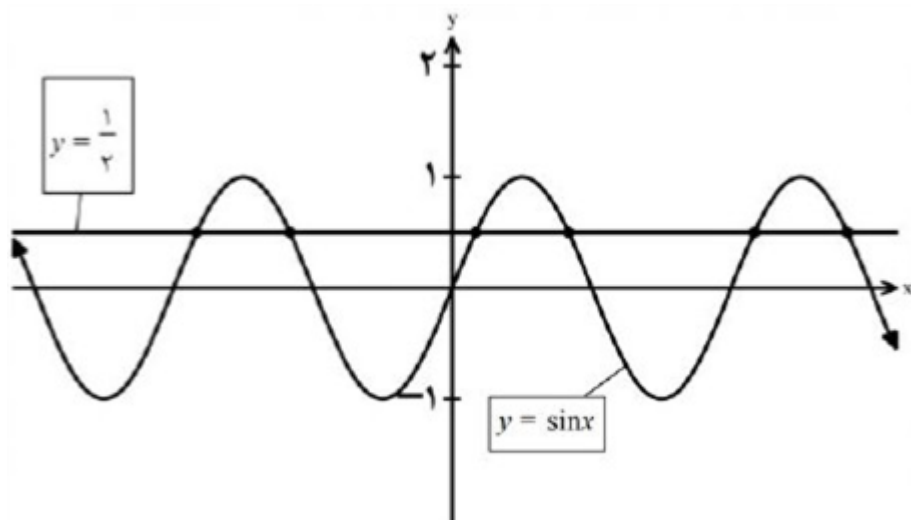
$$۲\sin x \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۱}{۲} = \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right)$$

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \\ x = k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$



نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ و خط به معادله $y = \frac{1}{2}$ در دستگاه زیر، رسم شده است. طول نقاط برخورد آن‌ها را بیابید.

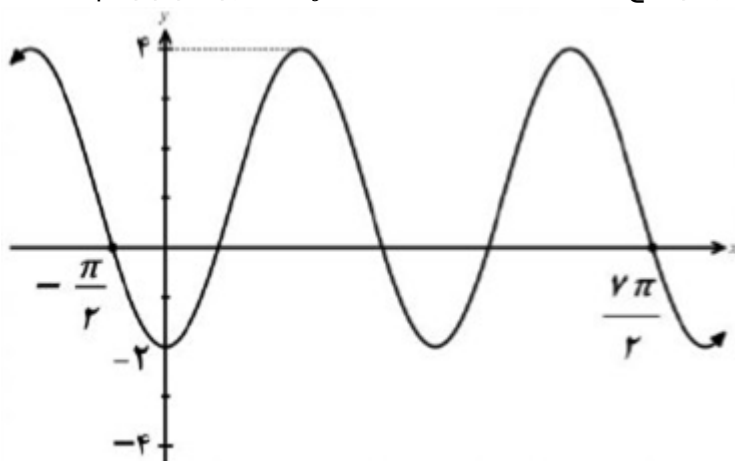


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

پاسخ: ۱

نمودار تابع با ضابطه $y = a \cos bx + c$ به صورت زیر رسم شده است. مقدار a ، b و c را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$2T = \frac{7\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi \Rightarrow T = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow b = \pm 1$$

پاسخ: ۱

$$c = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} |a| &= \frac{4 - (-2)}{2} = 3 \\ x &= 0 \text{ در مینیمم دارد} \Rightarrow a < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -3$$

معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را در بازه $0 \leq x \leq \pi$ حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

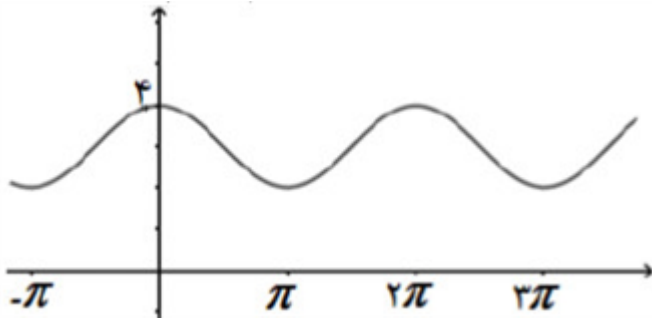
$$2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$



۱۷۰ نمودار تابع $f(x) = a + \cos bx$ به صورت مقابل است. حاصل $a + b$ را به دست آورید. ($b > 0$)



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$\text{Max} = 4 \Rightarrow a + 1 = 4 \Rightarrow a = 3$$

$$T = 2\pi : \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = 1 \quad a = 3 \quad a + b = 4$$

۱ پاسخ:

۱۷۱ معادله مقابل را حل کنید. $\cos 2x - 3 \sin x + 4 = 0$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$1 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 4 = 0 \Rightarrow -2 \sin^2 x - 3 \sin x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{5}{2} \text{ غ ق} \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۱ پاسخ:

۱۷۲ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 3 \cos(\pi x) + 2$ را به دست آورید.

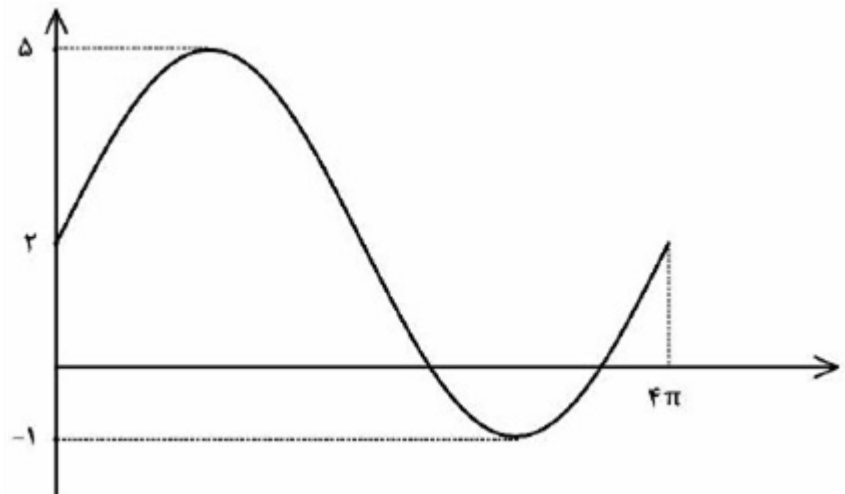
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$$

$$\text{max} = |a| + c = 5 \quad \text{min} = -|a| + c = -1$$

۱ پاسخ:

۱۷۳ نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \sin bx + c$ است. مقادیر a و b و c را محاسبه کنید و ضابطه آن را مشخص نمایید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow c = 2, a = \pm 3$$

$$4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3 \sin \frac{x}{2} + 2, y = -3 \sin \left(-\frac{x}{2}\right) + 2$$

۱ پاسخ:



۱۷۴ معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + \cos x = 0$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x (2 \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۱۷۵ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- تابع تانژانت در هر بازه‌ای که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ درست

۱۷۶ معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۱۷۷ معادله‌ی یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب آن ۲ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$|b| = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow b = \pm\pi$$

$$\Rightarrow y = \pm 4 \sin(\pm\pi x)$$

$$|a| = \frac{4 - (-4)}{2} = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$

$$c = \frac{4 + (-4)}{2} = 0$$

پاسخ: ۱

۱۷۸ معادله مثلثاتی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

پاسخ: ۱

۱۷۹ جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- دوره تناوب تابع $y = \sqrt{2} \sin\left(\frac{-\pi}{2}x\right) + 2$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ ۴

۱۸۰ ضابطه تابعی به فرم $y = a \cos bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن ۲ و مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار مینیمم آن -۲ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

هریک از توابع $y = -3 \cos(\pi x) + 1$ یا $y = 3 \cos(\pi x) + 1$ و $y = 3 \cos(-\pi x) + 1$ یا $y = -3 \cos(-\pi x) + 1$ نوشته شود مورد قبول است.



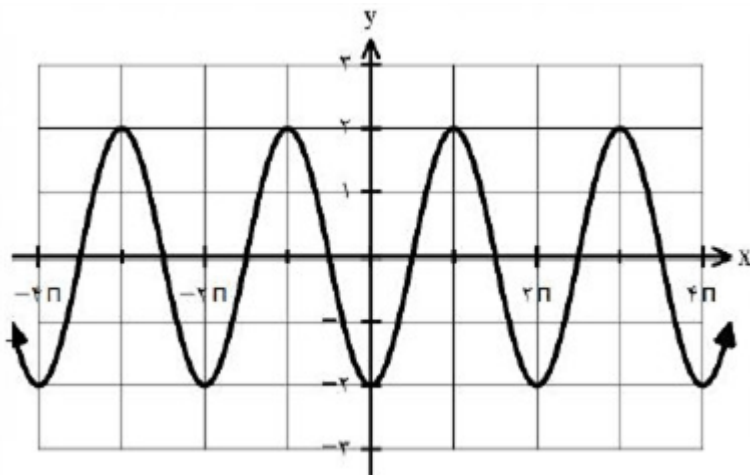
۱۸۱ معادله مثلثاتی $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۱۸۲ نمودار زیر برای تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ است. با دقت به شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$|a| = \frac{2 - (-2)}{2} = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$|b| = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \Rightarrow b = 1 \quad f(x) = -2 \cos x$$

$$c = \frac{2 + (-2)}{2} = 0$$

پاسخ: ۱

۱۸۳ مثلی با مساحت $8\sqrt{2}$ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی متر باشند، آن گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 8 \sin \theta = 8\sqrt{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ, \theta = 135^\circ$$

پاسخ: ۱

دو مثلث می‌توان رسم کرد.

۱۸۴ معادله‌ی یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار مینیمم آن -۱ و دوره‌ی تناوب آن 8π است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$|a| = \frac{5 - (-1)}{2} = 3 \Rightarrow a = \pm 3, c = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$$

$$|b| = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4} \quad y = \pm 3 \sin\left(\pm \frac{1}{4}x\right) + 2$$

پاسخ: ۱



معادله $2 \sin x \cos x + 3 \cos x = 0$ را حل کنید. **۱۸۵**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\cos x (2 \sin x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$\sin x = \frac{-3}{2}$ قابل قبول نیست

پاسخ: **۱**

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 9 - 2\pi \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ را محاسبه کنید. **۱۸۶**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c = |-2\pi| + 9 = 2\pi + 9 \\ \min &= -|a| + c = -|-2\pi| + 9 = -2\pi + 9 \\ T &= \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi \end{aligned}$$

پاسخ: **۱**

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. **۱۸۷**

- در بازه $0 < \theta < 2\pi$ مقدار $\frac{3\pi}{4} < \theta$ از مقدار $\sin \theta$ کوچکتر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: **۱** درست

معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x = \sin x - 1$ را حل کنید. **۱۸۸**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$-2 \sin^2 x - \sin x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{-3}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

پاسخ: **۱**

ضابطه تابع مثلثاتی سینوس با دوره تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ بنویسید. **۱۸۹**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\begin{aligned} |b| &= \frac{2\pi}{3} \\ |a| = 1, c = 4 \Rightarrow y &= \sin \frac{2\pi}{3} x + 4 \text{ یا } y = -\sin \frac{2\pi}{3} x + 4 \end{aligned}$$

پاسخ: **۱**

تنها نوشتن یکی از ضابطه‌های بالا کافی است.

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. **۱۹۰**

- برد تابع تانژانت $y = \tan x$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: **۱** R

معادله‌ی مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید. **۱۹۱**

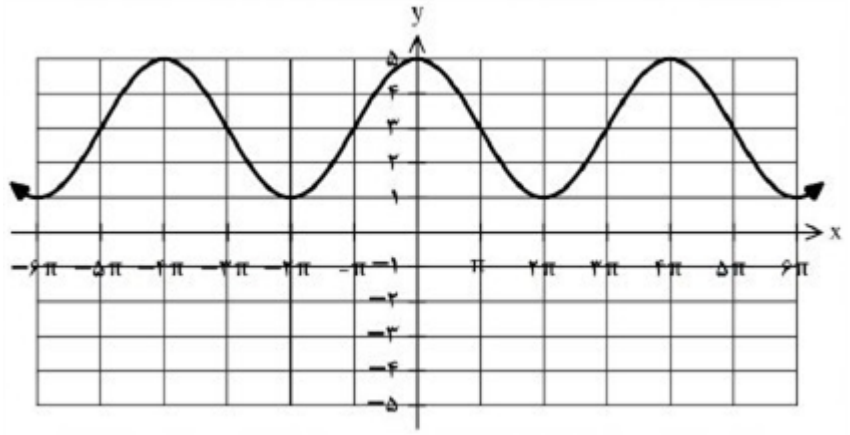
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پاسخ: **۱**



۱۹۲ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$c = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$|a| = \frac{5-1}{2} = 2 \quad a > 0, a = 2$$

$$b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3$$

$$\Rightarrow y = 2 \cos\left(-\frac{x}{2}\right) + 3 \quad \text{یا}$$

پاسخ: ۱

۱۹۳ دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع زیر را به دست آورید. (راحل نوشته شود)

$$y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

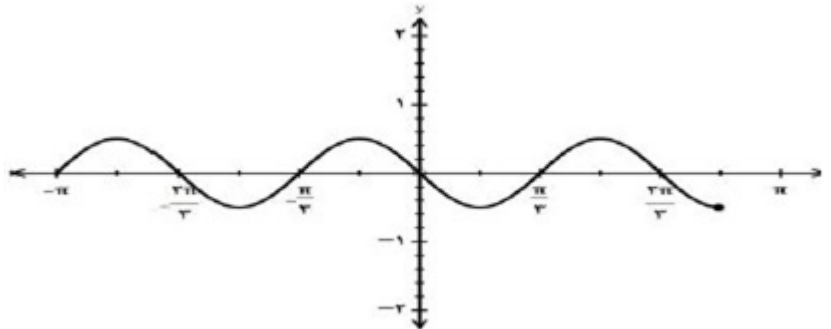
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\left. \begin{array}{l} \min = -|a| + c \\ \max = |a| + c \end{array} \right\} \text{الف} \quad \max = 8 \quad \min = -8$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$$

پاسخ: ۱

۱۹۴ در شکل نمودار زیر، با تعیین مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع، ضابطه‌ی آن را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۱ پاسخ: با توجه به نمودار ضابطه به صورت $y = a \sin bx + c$, $b = 3, a = -\frac{1}{3}$ می‌شود.

$$\max y = \frac{1}{3}, \min y = -\frac{1}{3}, T = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \sin 3x$$

۱۹۵ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

دامنه تابع با ضابطه‌ی $y = \tan x$ به صورت $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \dots\}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}$$

پاسخ: ۱



۱۹۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
برد تابع $f(x) = \operatorname{tg} x$ برابر بازه‌ی $[-1, 1]$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست

۱۹۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را بنویسید.
مقدار تابع سینوس در $x = \frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست

۱۹۸ معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$
 غ ق ق

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

۱۹۹ دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه‌حل نوشته شود)

$$y = \pi \sin(-x) + 1$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c = \pi + 1 \\ \min &= -|a| + c = -\pi + 1 \end{aligned} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$$

۲۰۰ معادله مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ 4x = 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

۲۰۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sqrt{5} - \pi \cos \frac{1}{2}x$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱

$$\max = \pi + \sqrt{5}, \min = -\pi + \sqrt{5}, T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

۲۰۲ معادله‌ی مثلثاتی $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱

$$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \cos x = 5 \end{cases}$$
 غ ق ق

$$\cos x = 5$$



دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. **۲۰۳**

$$y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2}x$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c = 1 + \sqrt{3} \\ \min &= -|a| + c = -1 + \sqrt{3} \end{aligned} \quad T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

پاسخ: ۱

معادله $\sqrt{2} - 2 \sin 3x = 0$ را حل کنید. **۲۰۴**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

پاسخ: ۱

مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 + 2 \sin 7x$ را به دست آورید. **۲۰۵**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$\begin{cases} \max y = |a| + c = 2 + 1 = 3 \\ \min y = -|a| + c = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. **۲۰۶**

دوره تناوب تابع $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ 6π

درست یا نادرست بودن عبارت زیر را تعیین کنید. **۲۰۷**

نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ در دامنه تابع تانژانت قرار ندارند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ درست (۰/۲۵)

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. **۲۰۸**

دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ π

معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید. **۲۰۹**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پاسخ: ۱



دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود). **۲۱۰**

$$y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$\min = -|a| + c \quad \max = \pi - 2 \quad \min = -\pi - 2$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

پاسخ: ۱

معادله $2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید. **۲۱۱**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$$

پاسخ: ۱

ضابطه تابعی به صورت $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π ، مقدار ماکزیمم آن ۶ و مقدار مینیمم آن -۲ باشد. **۲۱۲**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \begin{cases} |a| + c = 6 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

هریک از توابع $y = 4 \sin(2x) + 2$ یا $y = -4 \sin(2x) + 2$ یا $y = 4 \sin(-2x) + 2$ یا $y = -4 \sin(-2x) + 2$ صحیح است هر مورد نوشته شود مورد قبول است.

معادله‌ی مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید. **۲۱۳**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$2 \times \left(\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$$

پاسخ: ۱

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8}$$

دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos 2\pi x + 1$ را به دست آورید. **۲۱۴**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1, \max = |-3| + 1 = 4, \min = -|-3| + 1 = -2$$

پاسخ: ۱

معادله مثلثاتی $\sin 3x = \sin 2x$ را حل کنید. **۲۱۵**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

پاسخ: ۱

$$3x = (2k+1)\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5} (k \in \mathbb{Z})$$



۲۱۶

کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟
الف) تابع تانژانت در بازه $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ اکیداً صعودی است.
ب) نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ در دامنه تابع تانژانت قرار دارند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

ب) نادرست

پاسخ: ۱ الف) درست

۲۱۷

دوره تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3\cos(\pi x) + 1$ را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \max = |-3| + 1 = 4, \min = -|-3| + 1 = -2$$

پاسخ: ۱

۲۱۸

درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.
دوره‌ی تناوب تابع $y = \tan x$ برابر 2π است. (درست، نادرست)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ نادرست $0/25$

۲۱۹

مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2\sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\max = |-2| + 1 = 3, \min = -|-2| + 1 = -1$$

$0/25$ $0/25$

پاسخ: ۱

۲۲۰

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.
دوره تناوب تابع $y = 3\cos\left(-\frac{\pi}{4}x\right)$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ ۸ $(0/25)$

سوال ۸۰

فصل سوم

۲۲۱

مجاانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{5x+2}{x^2-4}$ را در صورت وجود به دست آورید. (راه‌حل نوشته شود).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$

پاسخ: ۱

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x+2}{x^2-4} = \frac{12}{0^-} = -\infty \text{ یا } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x+2}{x^2-4} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

در نتیجه خط $x = 2$ مجانب قائم تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{5x+2}{x^2-4} = \frac{-8}{0^+} = -\infty \text{ یا } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{5x+2}{x^2-4} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$$

در نتیجه خط $x = -2$ مجانب قائم تابع است.



حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x] + \cos x}{\sin x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + 5x + 2}{\sqrt{x^3} + 3x^2}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ الف) روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x] + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x] + \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{[x]}{\sin x} + \cot x \right) = 0 + \infty = +\infty$$

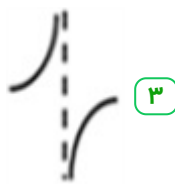
ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + 5x + 2}{\sqrt{x^3} + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3}{\sqrt{x^3}} = \frac{-4}{\sqrt{x}}$$

۲۲۳ کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}$ را در همسایگی $x = 0$ نمایش می‌دهد؟



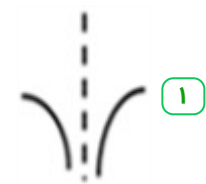
۴



۳



۲



۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

تابع $1 - \cos x$ در یک همسایگی محذوف صفر، مثبت است.

۲۲۴ الف) مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ را به دست آورید.

ب) وضعیت نمودار $f(x)$ را در همسایگی مجانب قائم آن نمایش دهید.

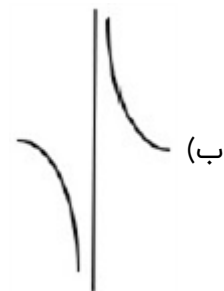
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ الف) خط $x = 1$ مجانب قائم است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{0^-} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

پس خط $y = 1$ مجانب افقی است.



ب)

۲۲۵ حاصل حدود زیر را به دست آورید.

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x + x}{x^2}$

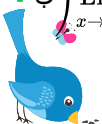
الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x^5 - 4x + 3}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x^5 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{0^-} = 1 - \infty = -\infty$

پاسخ: ۱



۲۲۶) حدهای زیر را محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{-x^5 + 2x^2 - 3}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2[-x] + 1}{|x - 2|}$

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(-2) + 1}{|2 - 2|} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-x^3} = 0$

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2 - \frac{2}{x^2}} =$

۲۲۷) حدود زیر را محاسبه کنید.

ب) $\lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} \frac{1}{\sin x} =$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x} + 1} =$

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

الف) $-\frac{1}{2}$

ب) $\frac{1}{(0)^-} = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x} + 1} \times \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2} - \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+2)(\sqrt{x^2} - \sqrt{x} + 1)}{(x+1)(\sqrt{x^2} - \sqrt{x} + 1)} = 3$

۲۲۸) مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ را در صورت وجود به دست آورید. سپس وضعیت نمودار تابع f را در همسایگی مجانب قائم آن نمایش دهید.

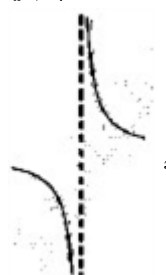
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ در تابع $f(x) = \frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)}$ ، خط $x=3$ شرایط مجانب قائم را ندارد. $\left(\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{6} \right)$

$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\Rightarrow x = -3$ مجانب قائم منحنی تابع f است

$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$



مجانب افقی $y=0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = 0$

۲۲۹) حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x-3)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

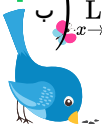
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x^2}{-x^2|x| - 2} =$

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x-3)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$



۲۳۰ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x}$ برابر است.

پاسخ: ۱ صفر (یا ۰)

۲۳۱ حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد [] علامت جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3}$

د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4} = \frac{1}{\cdot^+} = +\infty$

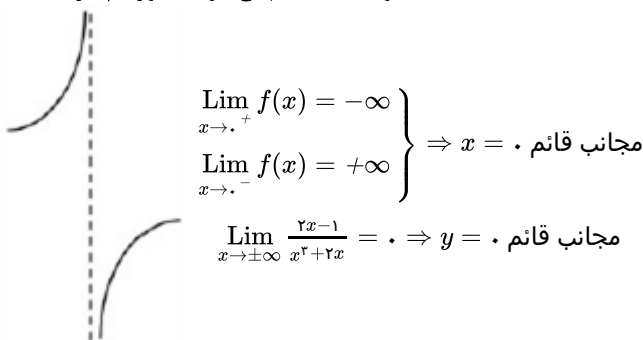
ج) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3} = \frac{1}{\cdot^-} = -\infty$

د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3}{2x^3} = -3$

پاسخ: ۱

۲۳۲ مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2x}$ را به دست آورده و سپس وضعیت نمودار تابع را در نزدیکی مجانب قائم آن نمایش دهید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳



پاسخ: ۱

۲۳۳ حدهای زیر را محاسبه کنید. (نماد [] علامت جزء صحیح است.)

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x + 1)$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x}{1 - x^2}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[2x] - 1}{x - 1}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[2x] - 1}{x - 1} = \frac{1}{\cdot^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{-x^2} = -2$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = +\infty$

پاسخ: ۱



جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. (۲۳۴)

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ برابر است.

پاسخ: ۱ $-\infty$

حدهای زیر را محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است.) (۲۳۵)

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x-2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x-4x^2}{3x+2x^2}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x-2} = \frac{1}{-} = -\infty$

پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x-4x^2}{3x+2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{2x^2} = -2$

مجانِب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{4-3x-x^2}$ را در صورت وجود بیابید. (۲۳۶)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$-x^2-3x+4 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -4$

پاسخ: ۱

پس قائم نیست $x=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{-x^2-3x+4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(-x-4)} = -\frac{2}{5}$

پس $x=-4$ مجانب قائم است. $x=-4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2-1}{-x^2-3x+4} = \frac{15}{-} = \infty$

مجانِب افقی $y=-1 \Rightarrow y = -1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{4-3x-x^2} = -1$

حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید. (۲۳۷)

الف) $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x^2+2x-15}{x^2+10x+25}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4-x+x^2}{5-2x^2}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

الف) $\lim_{x \rightarrow (-5)^-} \frac{x^2+2x-15}{x^2+10x+25} = \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{(x+5)(x-3)}{(x+5)(x+5)} = \frac{-8}{-} = +\infty$

پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x+4}{-2x^2+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-2x^2} = -\frac{1}{2}$

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (۲۳۸)

- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin x}$ برابر با $-\infty$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست



$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{|2-x|}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

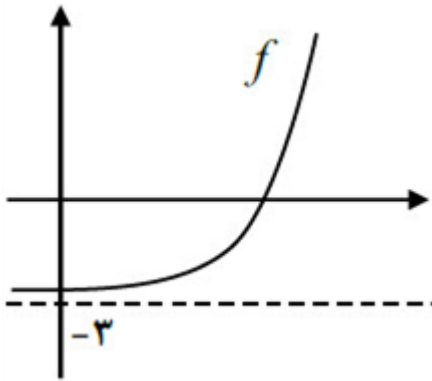
$$\text{الف) } \frac{3}{+} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1} &\times \frac{\sqrt{3x+1} + 2}{\sqrt{3x+1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

پاسخ: ۱

به روش‌های هم‌ارزی و هوپیتال نمره تعلق نمی‌گیرد.

۲۴۰ با توجه به نمودار تابع f ، حاصل حدهای زیر را به دست آورید.



$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$\text{الف) } -3 \quad \text{ب) } +\infty$$

پاسخ: ۱

۲۴۱ مجانب قائم منحنی تابع $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$f(x) = \frac{1}{x-|x|} = \begin{cases} \text{تعریف نشده} & x > 0 \\ \frac{1}{2x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ مجانب قائم}$$

پاسخ: ۱

۲۴۲ حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{2 + x - x^3}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - 1}{(x-1)^2}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - 1}{(x-1)^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{+} = -\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{2 + x - x^3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1$$

پاسخ: ۱

۲۴۳ جاهای خالی را با اعداد مناسب کامل کنید.

مجانب‌های افقی تابع $y = \frac{|x|+1}{2x-1}$ برابر و است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$y = -\frac{1}{2} \text{ و } y = \frac{1}{2} \quad \text{پاسخ: ۱}$$



۲۴۴) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{|\sin x|}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x^5}{x^3 - x}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = 3$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{|\sin x|} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x^5}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5}{x^3} = +\infty$$

۲۴۵) آیا مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x]-1}$ وجود دارد؟ چرا؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ خیر - زیرا تابع $f(x) = \frac{1}{[x]-1}$ در همسایگی راست $x=1$ تعریف نشده است.

۲۴۶) مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{3x-5}{x^2+2}$ را در صورت وجود بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ افقی}$$

پاسخ: ۱

$$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \text{ فاقد مجانب قائم } x = \pm\sqrt{2}i$$

۲۴۷) حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{5x}{|2x-1|}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x+3}{x^2+6x+9}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{5x}{|2x-1|} = \frac{\frac{5}{2}}{0^+} = +\infty$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x+3}{x^2+6x+9} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

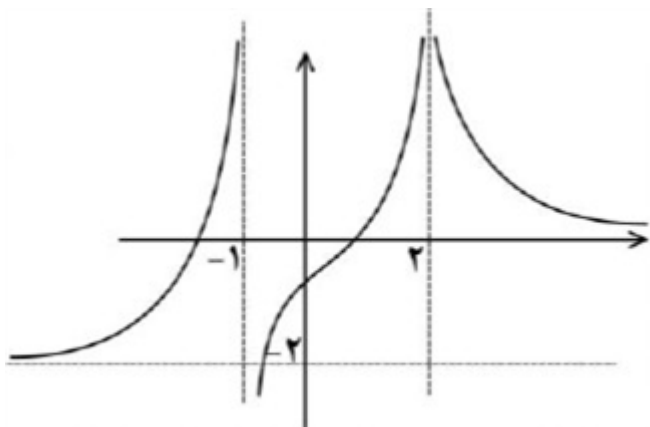


۲۴۸ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف) $-\infty$

ب) $+\infty$

پ) -2

پاسخ: ۱

۲۴۹ فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، محل تقاطع مجانب‌های آن، نقطه $(2, 1)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-1, 0)$ بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$cx + d = 0 \Rightarrow d = -2c$$

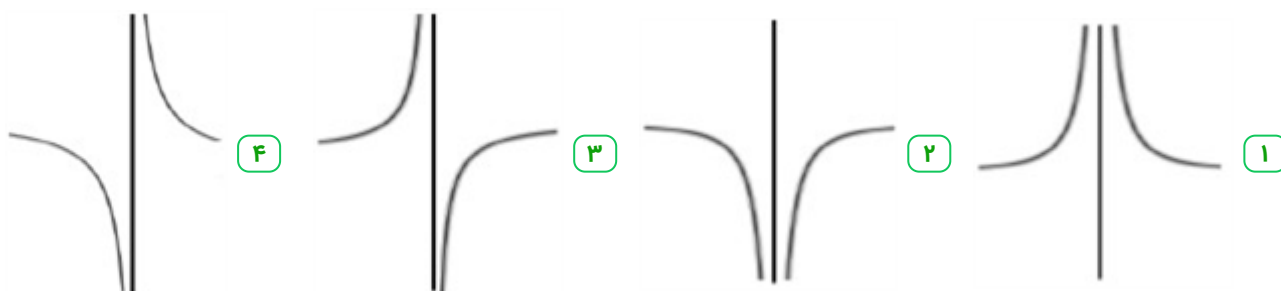
$$(-1, 0) \Rightarrow \frac{-a+b}{-c+d} = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{cx} = 1 \Rightarrow a = c$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

پاسخ: ۱

۲۵۰ کدام شکل وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{2[x]}{x-2}$ در نزدیکی مجانب قائم آن است؟ (نماد جزء صحیح است.)



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2[x]}{x-2} = \frac{6}{0^-} = +\infty$$

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2[x]}{x-2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$



۲۵۱) مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{x - ۲x^۳}{x^۳ + ۵}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - ۲x^۳}{x^۳ + ۵} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-۲x^۳}{x^۳} = -۲ \Rightarrow y = -۲ \text{ (ص ۶۹)}$$

پاسخ: ۱

۲۵۲) اگر $\lim_{x \rightarrow ۲^+} \frac{ax - ۳}{(۲ - x)^۲} = +\infty$ باشد، حدود a را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$\lim_{x \rightarrow ۲^+} \frac{ax - ۳}{(۲ - x)^۲} = \frac{۲a - ۳}{۰^-} = +\infty \Rightarrow ۲a - ۳ < ۰ \Rightarrow a < \frac{۳}{۲}$$

پاسخ: ۱

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow ۹} \frac{\sqrt{x} - ۳}{x - ۹}$$

۲۵۳) حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \text{ب) } & \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{۲}\right)^+} \frac{1}{\cos x} \\ \text{پ) } & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{۲ - x}{۵x + ۴} \end{aligned}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow ۹} \frac{\sqrt{x} - ۳}{x - ۹} \times \frac{\sqrt{x} + ۳}{\sqrt{x} + ۳} = \lim_{x \rightarrow ۹} \frac{x - ۹}{(x - ۹)(\sqrt{x} + ۳)} = \frac{1}{۶}$$

پاسخ: ۱

$$\begin{aligned} \text{ب) } & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{۲}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{۰^-} = -\infty \\ \text{پ) } & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{۵x} = -\frac{1}{۵} \end{aligned}$$

۲۵۴) اگر خط $y = ۲$ مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{ax^۲ + 1}{۲x^۲ - ۳x}$ باشد، مقدار a را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

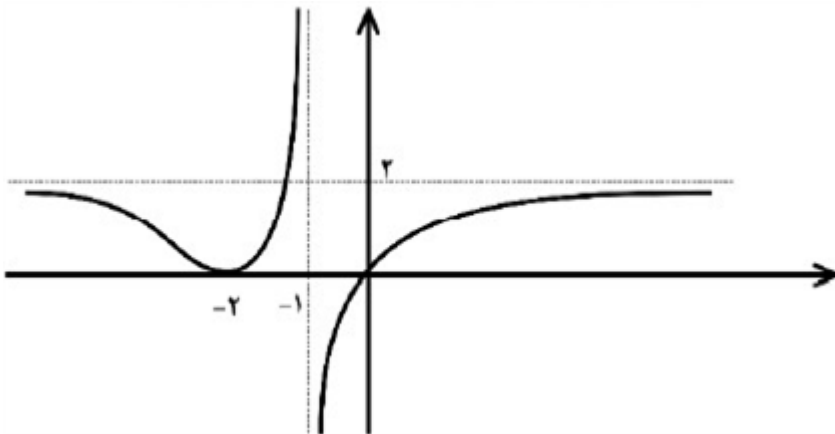
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^۲ + 1}{۲x^۲ - ۳x} = ۲ \Rightarrow \frac{a}{۲} = ۲ \Rightarrow a = ۴$$

پاسخ: ۱



۲۵۵ با توجه به نمودار تابع f ، موارد زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$
 ب) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \end{cases}$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۲ الف) پاسخ: ۱

ب) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \end{cases}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2}$ حدود زیر را بیابید. ۲۵۶

ب) $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{2}{\operatorname{tg} x}$
 ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 2x + 1}{4x - 1}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

الف) $\frac{1-2}{2^- - 2} = \frac{-1}{-} = +\infty$ پاسخ: ۱

ب) $\frac{2}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} = \frac{2}{-\infty} = 0$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4} = +\infty$



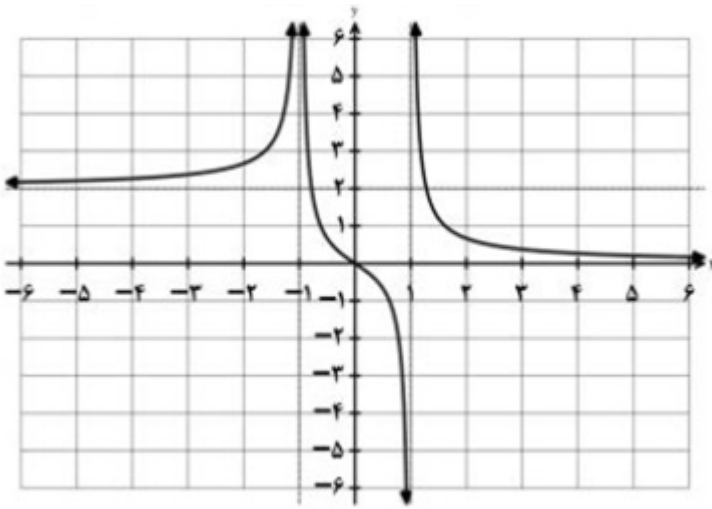
نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حدود خواسته شده را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

ت) $\lim_{x \rightarrow (1)^-} f(x) =$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

پاسخ: ۱

۲۵۸) مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+x}$ را در صورت وجود بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

مجانب افقی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow y = -1$

مجانب قائم نیست $x = -1$
مجانب قائم $x = 0$

پاسخ: ۱

۲۵۹) حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^2}{2x - 1}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{+4}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{2} = -\infty$

پاسخ: ۱

۲۶۰) مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ را در صورت وجود بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

مجانب افقی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$

مجانب‌های قائم $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

پاسخ: ۱

۲۶۱) حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{[x] - 2}{|3x - 1|}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x + 2}{5 - x} - \frac{1}{x} \right)$

پاسخ: ۱

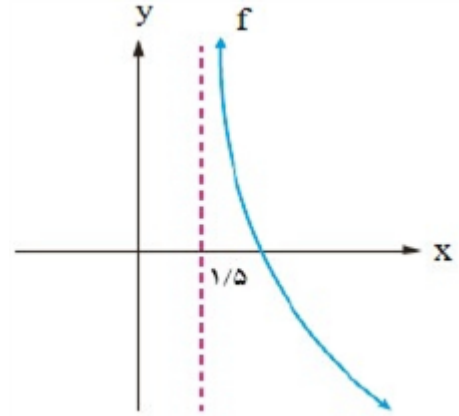
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{-2}{x} = -\infty$

ب) -4

۲۶۲) جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow (1/5)^+} f(x)$ برابر با است.



پاسخ: ۱ $+\infty$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۲۶۳) حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sin^2 x}$

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{(x)(2x - 1)}{(2x + 1)(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{(x)}{(2x + 1)} = \frac{1}{4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sin^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$



حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ۲۶۴

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^5 + 5x^2}{2x^2 + 9}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{(x - 1)(x + 2)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)(x + \sqrt{x})} = \frac{1}{6}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 \left(-2 + \frac{5}{x^0}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2)x^3 = -\infty$$

پاسخ: ۱

مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $y = \frac{x+1}{x^2+3}$ را در صورت وجود بیابید. ۲۶۵

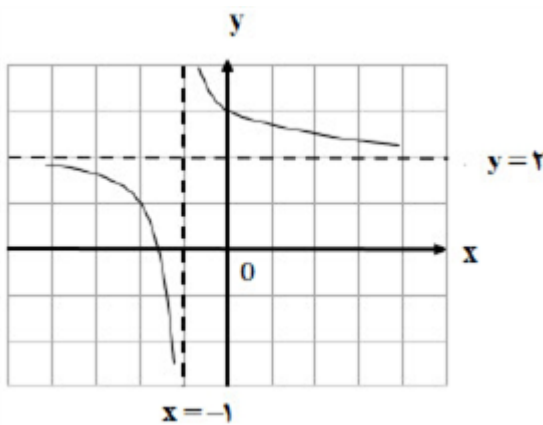
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

مجانب قائم ندارد $x^2 = -3 \Rightarrow x^2 + 3 = 0$

مجانب افقی $y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2+3} = 0$

پاسخ: ۱

اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{(a+1)x+7}{2x+b}$ به صورت مقابل باشد، آن‌گاه مقدار $a+b$ را پیدا کنید. ۲۶۶



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$2x + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2} \Rightarrow \frac{-b}{2} = -1 \Rightarrow b = 2$$

$$\frac{a+1}{2} = 2 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a + b = 5$$

پاسخ: ۱

حدهای زیر را محاسبه کنید. ۲۶۷

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{5 - x}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 5x + [-x]}{2x}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{الف) } \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = +\infty$$

پاسخ: ۱



۲۶۸ مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{1-2x^2}{x^2-1}$ را در صورت وجود بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

مجانب‌های قائم $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

پاسخ: ۱

مجانب افقی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-2x^2}{x^2-1} = -2 \Rightarrow y = -2$

۲۶۹ حدهای زیر را محاسبه کنید.

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\frac{2}{x} - 2}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{|x-2|}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

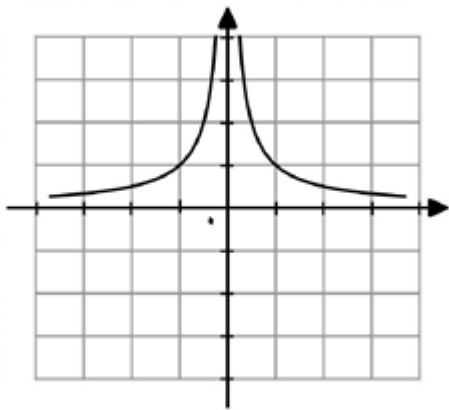
الف) $\frac{3}{0^+} = +\infty$

ب) $\frac{3+0}{0^- - 2} = \frac{-3}{-2}$

پاسخ: ۱

۲۷۰ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

- با توجه به شکل مقابل حد تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در نقطه $x = 0$ برابر است با



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ $+\infty$



حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ۲۷۱

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)} \frac{[x]}{|3x+1|}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - 5}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2 - \sqrt{x-1})(2 + \sqrt{x-1})}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{2}$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{-1}{|3x+1|} = \frac{-1}{\cdot^+} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی $-\frac{1}{3}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $-\frac{1}{3}$ برابر ۱- است. بنابراین جواب حد برابر $-\infty$ می‌شود.

$$\text{ج) } \frac{3 + \cdot}{\cdot - 5} = -\frac{3}{5}$$

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است.) ۲۷۲

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{2x-10}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2 - \sqrt{x-1})(2 + \sqrt{x-1})}{2(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{2(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{8}$$

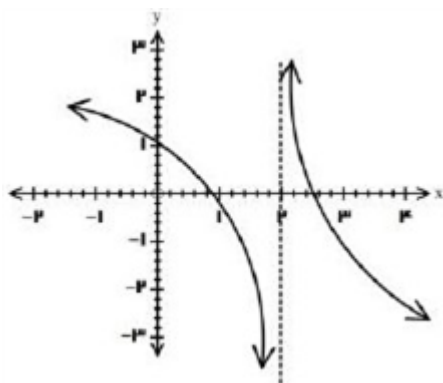
پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x-3} = \frac{-1}{\cdot^-} = +\infty$$

در نمودار تابع $f(x)$ موارد زیر را مشخص کنید. ۲۷۳

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = ?$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = ?$$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\text{الف) } +\infty$$

$$\text{ب) } -\infty$$

پاسخ: ۱



۲۷۴) مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{2x^2 + x}$ را در صورت وجود بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$2x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ مجانب های قائم}$$

پاسخ: ۱

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 1}{2x^2 + x} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ مجانب افقی}$$

۲۷۵) حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{[x] + 1}{x + 1}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - x^2}{3x^2 + 2}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\text{الف) } \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

۲۷۶) حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{|2x - 1|}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{-(x-3)} = -22$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{|2x - 1|} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{6x^3} = \frac{1}{3}$$

۲۷۷) مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2}$ را در صورت وجود به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2 \Rightarrow y = -2 \text{ مجانب افقی}$$

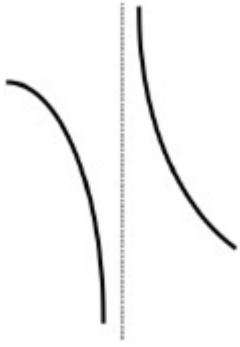
پاسخ: ۱

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ مجانب های قائم}$$



۲۷۹ نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می‌باشد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

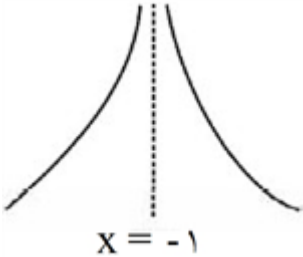


$$x(x^2+1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^2+x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x^2+x} = -\infty$$

پاسخ: ۱

۲۷۹ اگر رفتار تابع $f(x) = \frac{x+3}{x^2+bx+c}$ در اطراف نقطه $x = -1$ به صورت شکل زیر باشد، مقدار b و c را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = -1 \Rightarrow b = 2$$

$$(-1)^2 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

پاسخ: ۱

۲۸۰ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\operatorname{tg} x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2x^2+1}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x+1) = \frac{\pi}{2} + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\operatorname{tg} x} = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1} = 1$

پاسخ: ۱

۲۸۱ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

حد تابع $f(x) = \frac{5x+4}{x^3+x-8}$ وقتی که $x \rightarrow -\infty$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ صفر



۲۸۲ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{(x+2)(x-3)} = \frac{24}{5}$

پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x-3} = \frac{-1}{-} = +\infty$

۲۸۳ مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ را در صورت وجود به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

مجانب افقی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$

پاسخ: ۱

مجانب‌های قائم $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

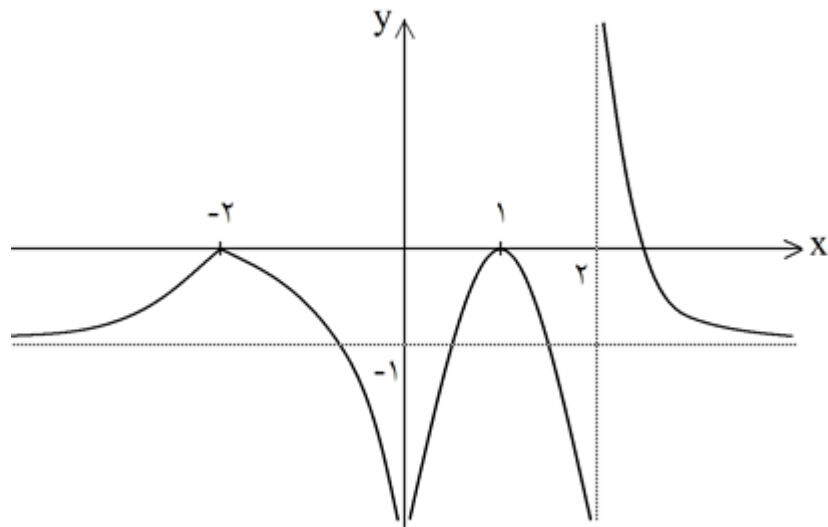
۲۸۴ نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد.

الف) $f(1) = f(-2) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

پ) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹



پاسخ: ۱

۲۸۵ حدود زیر را محاسبه کنید.

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

پاسخ: ۱

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$



۲۸۶ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2}$ برابر با است.

پاسخ: ۱ ۳ (۰/۲۵)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

۲۸۷ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را تعیین کنید.

حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$ برابر با $-\infty$ است.

پاسخ: ۱ درست (۰/۲۵)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

۲۸۸ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2x - 5x^2$ برابر با است.

پاسخ: ۱ $-\infty$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

۲۸۹ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x - 3|}$

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{(x+1)(x-3)} = -1$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{+} = +\infty$

۲۹۰ حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-5} - \frac{2}{x}$

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x^+} = \frac{3-2}{-} = \frac{1}{-} = -\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} - 0 = 3 - 0 = 3$

۲۹۱ مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x}$ را بیابید.

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

مجانب قائم $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \text{ قابل قبول نیست} \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1$



حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. ۲۹۲

الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{(x - 4)(x + 4)} \times \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - x}{(x - 4)(x + 4)(2 + \sqrt{x})}$

$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{(x + 4)(2 + \sqrt{x})} = \frac{-1}{32}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - 1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

پاسخ: ۱

در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. ۲۹۳

حد تابع $f(x) = \frac{-2x^4 + 5x^2}{2x^3 + 9}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل می‌کند برابر می‌باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاسخ: ۱ $-\infty$

مجاانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{x + 3}{2 - x}$ را بنویسید. ۲۹۴

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

م. افقی: $y = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 3}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{-x} = -1$

م. قائم: $x = 2$

پاسخ: ۱

حدهای زیر را محاسبه کنید. ۲۹۵

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 4x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x - 1} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

پاسخ: ۱

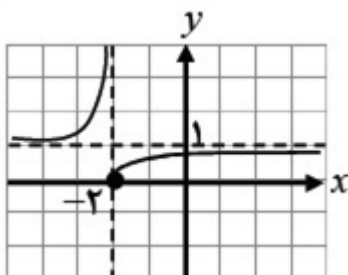


۲۹۶

با توجه به نمودار تابع f که در شکل مقابل آورده شده است، به سؤالات پاسخ دهید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

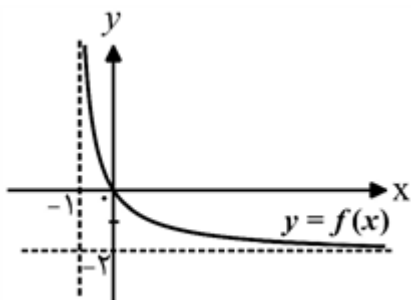
پاسخ: ۱ الف) $+\infty$

ب) ۱

۲۹۷ با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$



سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

الف) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

پاسخ: ۱

۲۹۸ حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} =$

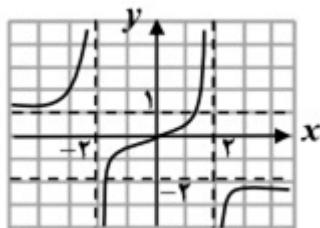
سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$\frac{-1}{0} = +\infty$

پاسخ: ۱



۲۹۹ با توجه به نمودار تابع f که در زیر آمده است، مجانب‌های افقی تابع را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$y = 1(0/25), y = -2(0/25)$$

پاسخ: ۱

۳۰۰ کدامیک از خطوط $x = 3$ و $x = -1$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می‌باشد؟ دلیل ارائه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \infty (0/25)$$

پاسخ: ۱

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)(0/25)}{(x-3)(x+1)(0/25)} (0/25) = \frac{1}{2} (0/25)$$

خط $x = -1$ مجانب قائم منحنی f است $(0/25)$ ولی $x = 3$ مجانب قائم برای تابع f نیست. $(0/25)$

سوال ۱۸۳

فصل چهارم

۳۰۱ تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی به دست آورید.

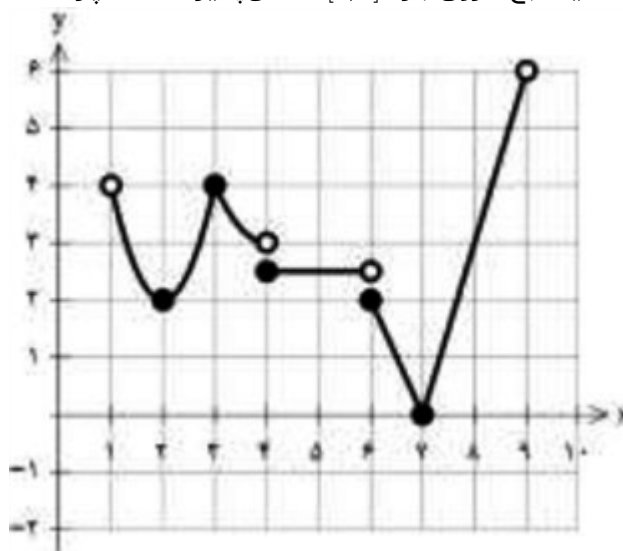
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(25) = \frac{1}{10}$$

پاسخ: ۱

۳۰۲ نمودار تابع f در زیر رسم شده است.

الف) تابع f در چند نقطه از دامنه‌اش مشتق‌ناپذیر است؟
ب) آیا تابع f روی بازه $[4, 6]$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ الف) ۴ نقطه

ب) خیر - زیرا در $x = 6$ مشتق چپ (پیوستگی چپ) ندارد.



۳۰۳ اگر $g'(2) = 3$ ، $g(2) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = 4$ باشد، آنگاه مشتق تابع $h(x) = (f \circ g)(x)$ را در $x = 2$ به دست آورید.

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = f'(5) = 4$$

$$h'(2) = g'(2)f'(g(2)) = 3 \times f'(5) = 12$$

پاسخ: ۱

۳۰۴ مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

$$\text{الف) } f(x) = (x^3 + 6x)\sqrt[3]{x} \quad \text{ب) } g(x) = \frac{2x + 3}{5x^2 + 4}$$

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\text{الف) } f'(x) = (3x^2 + 6)(\sqrt[3]{x}) + \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)(x^3 + 6x)$$

$$\text{ب) } g'(x) = \frac{(2)(5x^2 + 4) - (1 \cdot x)(2x + 3)}{(5x^2 + 4)^2}$$

پاسخ: ۱

۳۰۵ مشتق تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در $x = 2$ با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4$$

پاسخ: ۱ روش اول:

روش دوم:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 1 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4 + h)}{h} = 4$$

۳۰۶ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $g(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه $x = 27$ به دست آورید.

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow g'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$$

پاسخ: ۱ روش اول:

$$g(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow g'(27) = \frac{1}{27}$$

روش دوم:

۳۰۷ اگر f تابعی پیوسته با دامنه اعداد حقیقی باشد و $f(3) = 8 + f(1)$ ، آنگاه آهنگ متوسط تغییر تابع f را در بازه $[1, 3]$ به دست آورید.

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(1) + 8 - f(1)}{2} = 4$$

پاسخ: ۱ روش اول:

$$f(3) - f(1) = 8$$

روش دوم:

$$\frac{f(3) - f(1)}{2} = 4$$

در نتیجه:



۳۰۸ به کمک تعریف مشتق، متشقیپذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

پاسخ: ۱ روش اول:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 4}{x - 1} = 2$$

با توجه به اینکه $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ ، نتیجه می‌شود که تابع f در نقطه $x = 1$ مشتقی‌پذیر نیست.

روش دوم:

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)^2 + 3 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h + 2 = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2(1+h) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

با توجه به اینکه $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ ، نتیجه می‌شود که تابع f در نقطه $x = 1$ مشتقی‌پذیر نیست.

۳۰۹ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (1 + \sin 5x)^2$ ب) $g(x) = (x^2 - 5x)(\sqrt{x^2 + 1})$

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

الف) $f'(x) = (2)(5 \cos 5x)(1 + \sin 5x)$

پاسخ: ۱

$$g'(x) = (2x^2 - 5)(\sqrt{x^2 + 1}) + \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) (x^2 - 5x)$$

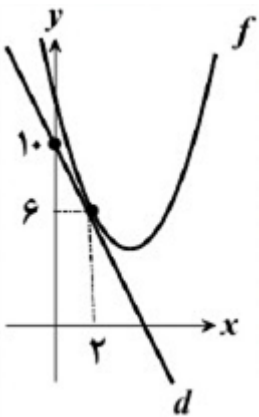
ب) روش اول:

$$g'(x) = (2x^2 - 5)(\sqrt{x^2 + 1}) + \left(\frac{1}{2} \right) (2x)(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (x^2 - 5x)$$

روش دوم:

۳۱۰ مطابق شکل روبه‌رو، خط d بر نمودار تابع f در نقطه $(2, 6)$ مماس است.

حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{3h}$ را به دست آورید.



سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{3h} = \frac{-1}{3} f'(2) = \frac{-1}{3} \left(\frac{6 - 10}{2 - 0} \right) = \frac{2}{3}$$

پاسخ: ۱

۳۱۱ جای خالی را با توجه به عبارتهای داخل پرانتز، کامل کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 1$ برابر است. (صفر، یک)

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ صفر



۳۱۲ تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ مفروض است. در نقطه $x = a$ ، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع کمتر از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 3]$ است، محدوده a را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ آهنگ متوسط تغییر در بازه $[0, 3]$: $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{-2 - 1}{3} = -1$

آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر $f'(x) = x^2 - 4$ است.

$$f'(a) < -1 \Rightarrow a^2 - 4 < -1 \Rightarrow a^2 < 3 \Rightarrow -\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$$

۳۱۳ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست).

الف) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 5x}{x - 3}$ ب) $g(x) = (\cos^3 x)(\tan x)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ الف) $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 5\right)(x - 3) - (\sqrt{x} - 5x)(1)}{(x - 3)^2}$

ب) $g'(x) = (3(-\sin x) \cos^2 x)(\tan x) + (\cos^3 x)(1 + \tan^2 x)$

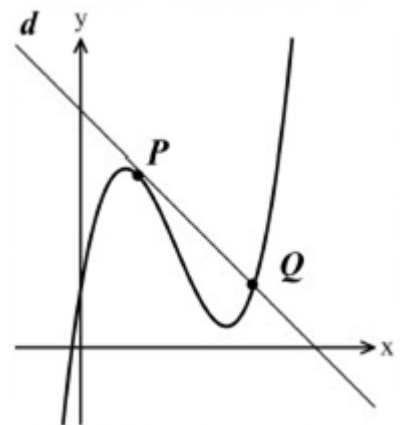
۳۱۴ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ را در نقطه $x = 2$ با استفاده از تعریف مشتق بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1 \end{cases}$

پس $f(x)$ در $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.

۳۱۵ مطابق شکل زیر خط d در نقطه $P(1, 2)$ بر نمودار تابع f مماس و در نقطه $Q(2a + 1, a)$ آن را قطع می‌کند. اگر $f'(1) = -1$ ، مقدار a را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ خط d در نقطه $P(1, 2)$ بر تابع $f(x)$ مماس است، بنابراین شیب خط d برابر -1 است.

روش اول: معادله خط d به صورت زیر است:

$$y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 3 \xrightarrow{Q(2a+1, a) \in d} a = -(2a+1) + 3 \Rightarrow a = 1$$

روش دوم: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a - 2}{2a + 1 - 1} = -1 \Rightarrow a = 1$



۳۱۶

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.
مشتق دوم تابع $y = \sin x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ -۱

۳۱۷

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست

۳۱۸

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
نقطه $x = 0$ یک نقطه گوشه‌ای تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست

۳۱۹

تابع $f(x) = x^3 + x - 5$ را در نظر بگیرید.
الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0, 3]$ به دست آورید.
ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در چه نقطه‌ای از بازه $[0, 3]$ برابر ۱۳ است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

الف) $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{25 - (-5)}{3} = 10$

پاسخ: ۱

ب) $f'(x) = 3x^2 + 1 = 13 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x = 2$

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

۳۲۰

ب) $g(x) = \frac{2x^3 - 1}{-x^2 + 2x}$

الف) $f(x) = (2x^6 + \sqrt{2x})^7$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

الف) $f'(x) = 7(2x^6 + \sqrt{2x})^6 \left(12x^5 + \frac{1}{\sqrt{2x}} \right)$

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = \frac{6x^2(-x^2 + 2x) - (-2x + 2)(2x^3 - 1)}{(-x^2 + 2x)^2}$

شیب خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 - x$ در نقطه $x = 3$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

۳۲۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = 5$

پاسخ: ۱



۳۲۲

گنجایش ظرفی ۲۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = ۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = ۲۰ \left(1 - \frac{t}{۵۰}\right)^۲$ به دست آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰, ۵۰]$ می‌شود؟

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$۲۰(۲) \left(1 - \frac{t}{۵۰}\right) \left(-\frac{۱}{۵۰}\right) \text{ یا } -\frac{۴}{۵۰} \left(1 - \frac{t}{۵۰}\right)$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{۰ - ۲۰}{۵۰ - ۰} = \frac{-۲}{۵}$$

از برابری آهنگ متوسط و لحظه‌ای نتیجه می‌گیریم $t = ۲۵$

۳۲۳

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ & x < ۲ \\ ۶x - ۴ & x = ۲ \\ ۲\sqrt{x-1} + ۶ & x > ۲ \end{cases}$ را در نقطه $x = ۲$ بررسی کنید.

پاسخ: ۱

در $x = ۲$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} ۴x & x < ۲ \\ ۲\left(\frac{۱}{\sqrt{x-1}}\right) & x > ۲ \end{cases} \Rightarrow f'_+(۲) = ۱, f'_-(۲) = ۸$$

پس در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست.

۳۲۴

مشتق تابع داده شده را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

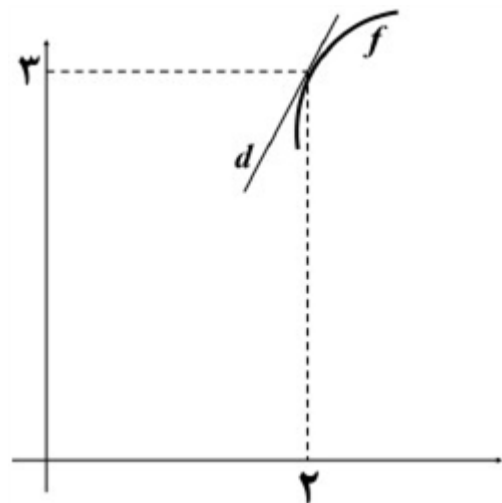
$$h(x) = \left(\frac{\sqrt{1-3x}}{v+x}\right)^۶$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$h'(x) = ۶ \left(\frac{\sqrt{1-3x}}{v+x}\right)^۵ \left(\frac{\left(\frac{-۳}{2\sqrt{1-3x}}\right)(v+x) - (1)(\sqrt{1-3x})}{(v+x)^۲}\right)$$

پاسخ: ۱

با توجه به شکل، اگر $\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{۵f(x) - ۱۵}{x - ۲} = ۱۰$ باشد، معادله خط d را به دست آورید.



۳۲۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{۵(f(x) - f(۲))}{x - ۲} = ۵f'(۲) = ۱۰ \Rightarrow f'(۲) = ۲ \Rightarrow y = ۲x - ۱$$

پاسخ: ۱



۳۲۶

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

تابع $f(x) = |x - 1|$ در تمام نقاط حقیقی پیوسته است پس در R مشتق پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست

۳۲۷

تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.الف) آهنگ متوسط رشد در بازه $[0, 25]$ را به دست آورید.

ب) آهنگ لحظه ای تغییر قد کودک در ۴۹ ماهگی را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\text{الف) } \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$$

$$\text{ب) } f'(x) = 7 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=49} f'(49) = \frac{1}{2}$$

پاسخ: ۱

۳۲۸

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$\text{الف) } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^3 - 6x + 1}$$

$$\text{ب) } g(x) = 2 \tan x + \cos^5(2x^2)$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x^3 - 6x + 1) - (2x^2 - 6)\sqrt{x+1}}{(x^3 - 6x + 1)^2}$$

$$\text{ب) } g'(x) = 2(1 + \tan^2 x) + (5)(2x)(-\sin(2x^2)) \cos^4(2x^2)$$

پاسخ: ۱

۳۲۹

اگر $f(x) = |x|(x - 2)$ باشد. به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع f را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|(x - 2) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x(x-2)-0}{x} = +2 \\ f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-2)-0}{x} = -2 \end{cases}$$

چون $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ ، لذا تابع f در $x = 0$ مشتق پذیر نیست.

پاسخ: ۱

۳۳۰

اگر $f(2) = 7$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{2x - 4} = 5$ باشد، مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ را در $x = 2$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{2} f'(2) = 5 \Rightarrow f'(2) = 10$$

$$g'(x) = 1 \times f(x) + x \times f'(x) \Rightarrow g'(2) = 1 \times 7 + 2 \times 10 = 27$$

پاسخ: ۱

۳۳۱

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

اگر $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ باشد، حاصل $f''(-1)$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ ۲



۳۳۲

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- خط $x = 2$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ در نقطه $(2, 0)$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست

۳۳۳

تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نظر بگیرید.الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید.ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازه $[0, 2]$ بزرگتر باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\text{الف) آهنگ متوسط در بازه } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) آهنگ لحظه‌ای } f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 > 1 \Rightarrow x > 1$$

مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

۳۳۴

$$f(x) = (x - 6)^3 + \frac{5x + 3}{\sqrt{2x - 1}}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = 3(x - 6)^2 + \frac{5(\sqrt{2x - 1}) - \frac{2}{2\sqrt{2x - 1}}(5x + 3)}{(\sqrt{2x - 1})^2}$$

پاسخ: ۱

با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = 2$ بیابید.

۳۳۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = -4$$

پاسخ: ۱

اگر نمودار تابع f از نقطه $A(2, 4)$ بگذرد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$ باشد، معادله خط مماس بر نمودار f را در نقطه A به دست آورید.

۳۳۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ فرض کنیم $y = ax + b$ ، خط مماس بر منحنی f در نقطه $(2, 4)$ واقع بر آن باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3 \Rightarrow f'(2) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$y = 3x + b \xrightarrow{(2, 4)} b = -2 \Rightarrow y = 3x - 2$$

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

۳۳۷

- تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست



۳۳۸

جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. (t برحسب ثانویه)
الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی [۳, ۴] را به دست آورید.
ب) لحظه‌ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر $20 \frac{m}{s}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

الف) $\frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5$: روش اول

روش دوم : $h'(3/5) = -10(3/5) + 40 = 5$

ب) $h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow -10t + 40 = 20 \Rightarrow t = 2$

پاسخ: ۱

۳۳۹

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

ب) $g(x) = \sin^2 3x + \tan(x^2)$

الف) $f(x) = (x^2 + 1)^2 (\sqrt{3x + 2})$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

الف) $f'(x) = 2 \times 3x^2 (x^2 + 1) (\sqrt{3x + 2}) + \frac{2}{2\sqrt{3x + 2}} (x^2 + 1)^2$

ب) $g'(x) = 2 \times 3 \times \cos 3x \sin 3x + 2x (1 + \tan^2(x^2))$

پاسخ: ۱

اگر دانش‌آموزی به صورت $3 \sin 6x$ بنویسد، نمره بارم این قسمت تعلق گیرد.)

اگر $f'(1) = 3$, $g'(1) = 5$ و $f(1) = 1$, مقدار مشتق $(f + g)$ در $x = 1$ را به دست آورید. ۳۴۰

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$((f + g) \text{ of })'(1) = f'(1) \times (f + g)'(f(1)) = f'(1) \times (f'(1) + g'(1)) = 3 \times (3 + 5) = 24$

پاسخ: ۱

۳۴۱ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} |x| & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ f پیوسته است.

$$\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر}$$

۳۴۲ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

اگر $f'(4) = 2$ و $f(4) = -1$, خط مماس بر نمودار f در $x = 4$, محور yها را در نقطه‌ای به عرض قطع می‌کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ -۹



۳۴۳ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 + t - 1$ است:

الف) سرعت متوسط متحرک در بازه $[1, 2]$ را محاسبه کنید.

ب) سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه $t = 2$ چقدر است؟

پاسخ: ۱

۳۴۴ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^2 - 2x)$ ب) $g(x) = \frac{3x + 1}{x^5 - x + 1}$

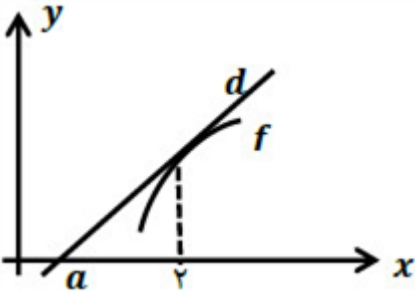
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

الف) $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x^2 - 2x) + (2x^2 - 2)(2\sqrt{x} + 1)$

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = \frac{3(x^5 - x + 1) - (5x^4 - 1)(3x + 1)}{(x^5 - x + 1)^2}$

۳۴۵ خط d در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ مماس است. با توجه به شکل مقدار a (نقطه برخورد خط d با محور x ها) را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f'(2) = 2$

پاسخ: ۱

$d : (2, 3), (a, 0) : 2 = \frac{0 - 3}{a - 2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

۳۴۶ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+5}$ را وقتی متغیر از $x = -1$ به $x = 4$ تغییر می‌کند، به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$

پاسخ: ۱

۳۴۷ اگر $f(x) = 2x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشند. حاصل $(f+g)'(4) + (f \times g)'(1)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$(f+g)'(4) = f'(4) + g'(4) = (4)^2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 16 + \frac{1}{4}$

پاسخ: ۱

$f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = (4)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(3) = 4 + \frac{3}{2}$

$(f+g)'(4) + (f \times g)'(1) = 16 + \frac{1}{4} + 4 + \frac{3}{2} = \frac{415}{4}$



۳۴۸ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \sin x}$

ب) $g(x) = \cos^v(x^r)$

پ) $h(x) = (3x + 5)^6$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

الف) $f'(x) = \frac{5(1 + \tan^r x)(1 - \sin x) - (-\cos x)(5 \tan x)}{(1 - \sin x)^r}$

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = -v \cos^r(x^r) \times rx \times \sin(x^r)$

پ) $h'(x) = 6 \times 3 \times (3x + 5)^5$

۳۴۹ تابع $f(x) = \begin{cases} x^r + x & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1 - r}{x - 1} = 1$

پاسخ: ۱

$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^r + x - r}{x - 1} = r$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ در نتیجه تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

۳۵۰ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- تابعی وجود ندارد که برای آن شرایط $f(a) = 0$ و $f'(a) = 0$ برقرار باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

۳۵۱ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^r + 2t + 3$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 2]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 2]$ با هم برابرند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$f'(t) = 2t + 2$

پاسخ: ۱

متوسط $= \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{11 - 3}{2} = 4$

$2t + 2 = 4 \Rightarrow t = 1$

۳۵۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $g(x) = \frac{(2x - 1)^r}{x^r + 8}$

ب) $f(x) = \sqrt[r]{2x + 1}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

الف) $g'(x) = \frac{r \times 2 \times (2x - 1)^{r-1} (x^r + 8) - r x^{r-1} (2x - 1)^r}{(x^r + 8)^r}$

پاسخ: ۱

ب) $f'(x) = \frac{r}{r \sqrt[r]{(2x + 1)^{r-1}}}$



۳۵۳ اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ آن‌گاه به کمک تعریف مشتق نشان دهید: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

پاسخ: ۱

۳۵۴ جمله‌ی زیر را کامل کنید.

اگر $f(x) = -x^3$ آن‌گاه $f''(1)$ برابر است با

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ -۶

۳۵۵ تابعی با ضابطه $f(x) = \frac{3x-6}{x^2+2}$ را در نظر بگیرید:

الف) آهنگ تغییر متوسط در بازه $[-2, 0]$ را به دست آورید.
ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = -1$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

الف) $\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$

ب) $f'(x) = \frac{-3x^2 + 12x + 6}{(x^2+2)^2} \Rightarrow f'(-1) = -1$

پاسخ: ۱

۳۵۶ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (x^4 + 2x)(\sqrt{x})$

ب) $g(x) = 3 \operatorname{tg} x - \sin^3(2x)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

الف) $f(x) = (x^4 + 2x)(\sqrt{x}) \Rightarrow f'(x) = (4x^3 + 2)(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^4 + 2x)$

ب) $g(x) = 3 \operatorname{tg} x - \sin^3(2x) \Rightarrow g'(x) = 3(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 6 \sin^2 2x \cos 2x$

پاسخ: ۱

۳۵۷ با استفاده از تعریف مشتق تابع، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را در نقطه $x = 2$ بررسی نمایید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$$

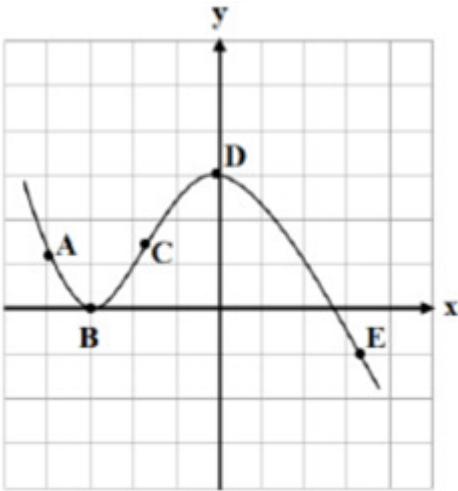
پاسخ: ۱

تابع در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.



با توجه به نمودار تابع مقابل:

- الف) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟
 ب) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟
 پ) در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟
 ت) شیب نقاط D و A را با هم مقایسه نمایید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

ت) $m_D > m_A$

پ) C

ب) B

الف) E ۱ پاسخ:

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است.

۳۵۹

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۱ پاسخ: نادرست

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.

۳۶۰

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۱ پاسخ: درست

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ در نقطه‌ای به طول $x = 2$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه

$[-2, 0]$ است؟

۳۶۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = 4x + 5 \Rightarrow f'(2) = 13$$

$$\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x = 2$ ، برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-2, 0]$ است.

۱ پاسخ:



۳۶۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 4)$

ب) $g(x) = \frac{-7x^2 + 1}{x - 6}$

پ) $h(x) = (2x^5 - 1)^2$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

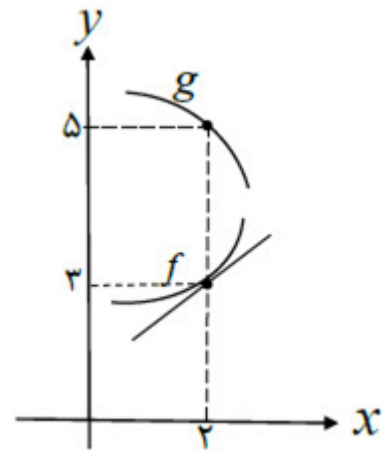
الف) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3 + 4) + 3x^2(\sqrt{3x+2})$

ب) $g'(x) = \frac{(-14x)(x-6) - (1)(-7x^2 + 1)}{(x-6)^2}$

پ) $h'(x) = 2(2x^5 - 1)^2(10x^4)$

پاسخ: ۱

۳۶۳ با توجه به نمودارهای توابع f و g حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2}$ چند برابر $f'(2)$ است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 5f'(2) \end{aligned}$$

پاسخ: ۱

۳۶۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- نقطه $(1, 1)$ یک نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x) = |2 - x^2|$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

۳۶۵ در تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{120}{t} + 5$ مجموع آهنگ لحظه‌ای تغییر در لحظه $t = 2$ و آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t)$ در بازه $[2, 6]$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$f'(t) = \frac{-120}{t^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-120}{4} = -30$

آهنگ متوسط $= \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{\left(\frac{120}{6} + 5\right) - \left(\frac{120}{2} + 5\right)}{6 - 2} = \frac{25 - 35}{2} = -5$

$\Rightarrow -30 - 5 = -35$

پاسخ: ۱



۳۶۶ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (5x^2 - x)^9 (\sqrt{2x+1})$ ب) $g(x) = \frac{2 \tan x}{3x^2 - 1}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

الف) $f'(x) = 9(15x^2 - 1)(5x^2 - x)^8 (\sqrt{2x+1}) + \left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \right) (5x^2 - x)^9$ (ص ۹۴)

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = \frac{2(1 + \tan^2 x)(3x^2 - 1) - (6x) \times (2 \tan x)}{(3x^2 - 1)^2}$ (ص ۹۶)

۳۶۷ اگر $f(x) = \cos 2x$ باشد، مقدار $f''\left(\frac{\pi}{8}\right)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$f'(x) = -2 \sin 2x \Rightarrow f''(x) = -2 \cos 2x$

پاسخ: ۱

$f''\left(\frac{\pi}{8}\right) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}$ (ص ۱۰۱)

۳۶۸ با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید اگر $f(x) = \sqrt{x}$ ، $x > 0$ ، آنگاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{ص ۹۳}) \end{aligned}$$

پاسخ: ۱

(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، بارم به تناسب تقسیم شود.)

۳۶۹ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x < 1 \\ 2x^2 - 3 & x \geq 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ تابع پیوسته است.

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 4 + 1}{x - 1} = 2$

$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 4 + 1}{x - 1} = 3$

$\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌ناپذیر است.

(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، برای محاسبه مشتق چپ و راست، بارم به تناسب تقسیم شود.)

۳۷۰ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -4t^2 + 40t$ به دست می‌آید.

الف) سرعت متوسط در بازه $[2, 4]$ را بیابید.

ب) در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف) $\text{سرعت متوسط} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 64}{2} = 16$

پاسخ: ۱

ب) $h'(t) = -8t + 40 = 16 \Rightarrow t = 3$



۳۷۱ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = x(x-1)(x+1)$ ب) $g(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2$

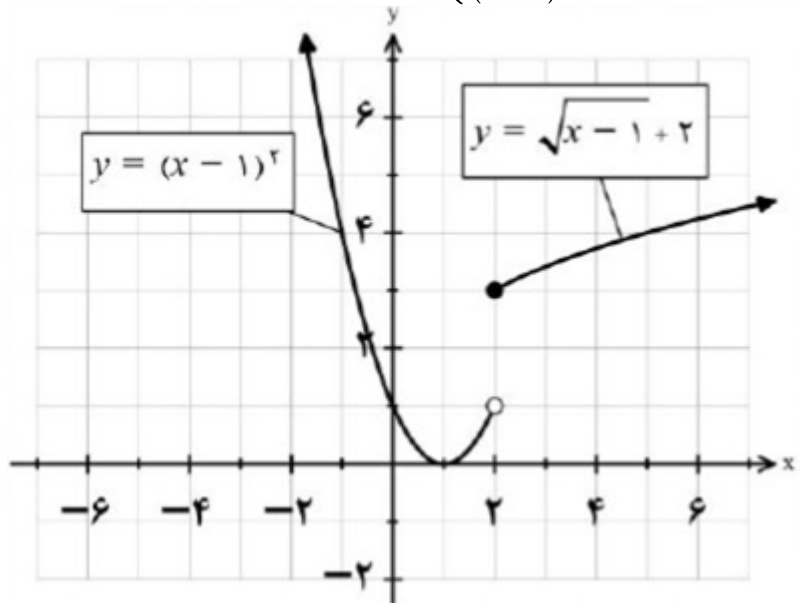
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف) $f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$

ب) $g'(x) = 2 \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2 \left(\frac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2}\right)$

پاسخ: ۱

۳۷۲ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + 2 & x \geq 2 \\ (x-1)^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت مقابل است:



الف) آیا تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر است؟

ب) آیا تابع در بازه $(-\infty, 2)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟

پ) مشتق راست تابع f در نقطه $x = 2$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ الف) خیر - چون ناپیوسته است.

ب) بله، در تمام نقاط بازه $(-\infty, 2)$ مشتق‌پذیر است.

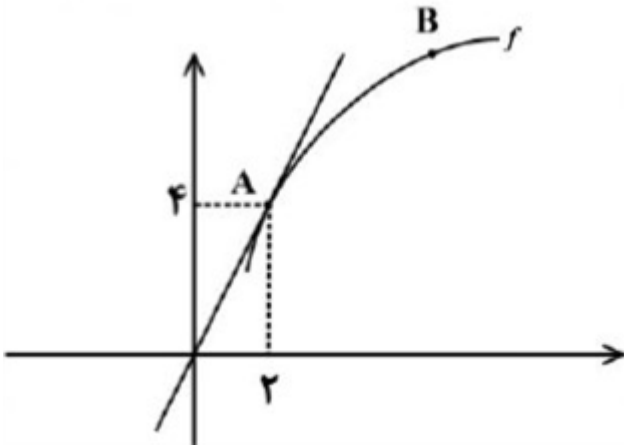
پ) $x \geq 2: f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2}$



نمودار تابع f به صورت مقابل رسم شده است. اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد:

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ را بیابید.

ب) شیب خط های مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{4}{2} = 2$

پاسخ: ۱

ب) $m_A > m_B$

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t$ گرم است. در چه لحظه‌ای، آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه زمانی $0 \leq t \leq 4$ می‌شود؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \Rightarrow \text{آهنگ متوسط} = \frac{10 - 0}{4 - 0} = \frac{5}{2}$

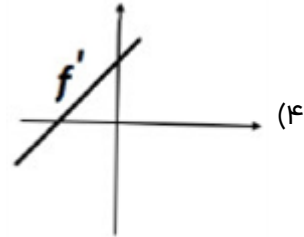
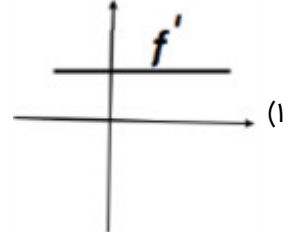
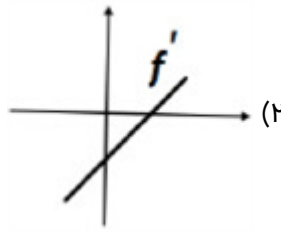
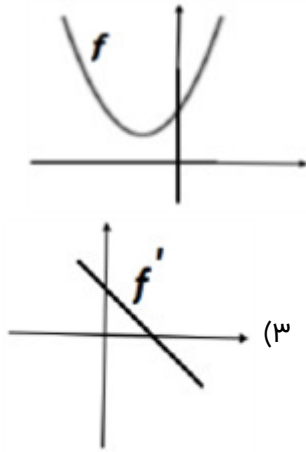
پاسخ: ۱

$\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1$



۳۷۵

با توجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور x را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند.

x	$x_S < 0$	
f	نزولی	صعودی
f'	-	+

۳۷۶

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = \sqrt{7x}(3x^2 + 2)$ ب) $g(x) = \cos^3(2x) - \frac{1}{x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف) $f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x}}(3x^2 + 2) + \sqrt{7x}(6x)$

ب) $g'(x) = 3(-2\sin 2x)(\cos^2 2x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

پاسخ: ۱

۳۷۷

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 0$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$f'(0) = m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty, A(0, 0)$

پاسخ: ۱

معادله مماس قائم: $x = 0$

۳۷۸

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$g(x) = (\sqrt{3x+1})(x^2 + 2x) \quad \text{ب)}$$

$$f(x) = \frac{-2x+3}{x+4} \quad \text{الف)}$$

پاسخ: ۱

$$\text{الف)} \quad f'(x) = \frac{-2(x+4) - 1(-2x+3)}{(x+4)^2}$$

$$\text{ب)} \quad g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^2 + 2x) + (2x+2)(\sqrt{3x+1})$$

معادله نیم مماس راست تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر منحنی بنویسید.

۳۷۹

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1)$$

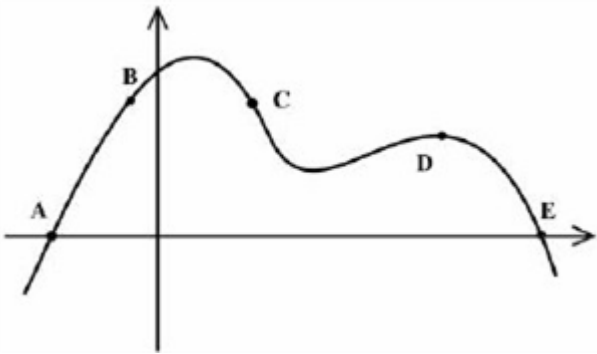
پاسخ: ۱

از بین نقاط مشخص شده A و B و C و D و E روی نمودار مقابل، در کدام نقطه:

۳۸۰

الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟

ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ الف) A

ب) C

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $y = (x^2 - 1)[x]$ در $x = 1$ مشتق‌پذیر است.

۳۸۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ نادرست

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t + 3$ برحسب متر است. (t برحسب ثانیه است.)

۳۸۲

الف) سرعت متوسط تابع در بازه $[0, 3]$ را به دست آورید.ب) سرعت لحظه‌ای تابع را در $t = 4$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$\text{الف)} \quad \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 3}{3} = 5$$

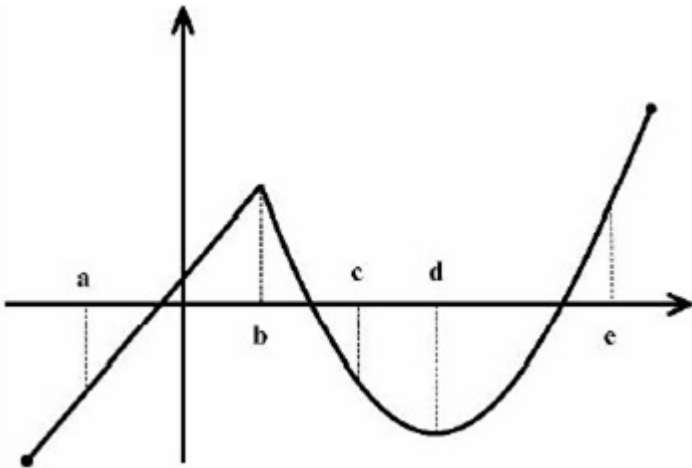
$$\text{ب)} \quad f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow f'(4) = 15$$

پاسخ: ۱



با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل از بین نقاط مشخص شده مطلوب است طول نقطه‌ای که:

- (الف) تابع در آن مشتق پذیر نیست.
 (ب) مماس در آن موازی محور طول‌هاست
 (پ) مشتق و مقدار تابع در آن مثبت است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پ (e)

ب (d)

الف (b) ۱ پاسخ:

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (4x^2 - 5x)^3 (\sqrt{x} + 1)$

ب) $g(x) = \frac{9x + 1}{x - x^2}$

پ) $h(x) = \sin(3x^2)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

الف) $f'(x) = 3(4x^2 - 5x)^2 (8x - 5)(\sqrt{x} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(4x^2 - 5x)^3$

۱ پاسخ:

ب) $g'(x) = \frac{9(x - x^2) - (1 - 2x)(9x + 1)}{(x - x^2)^2}$

پ) $h'(x) = 6x \cos(3x^2)$

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۱ پاسخ: تابع در $x = 1$ پیوسته است.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = 2, f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1 - 2}{x - 1} = 3$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه $[0, 5]$ (ت برحسب ثانیه) داده شده است. سرعت متوسط را در بازه زمانی $[0, 5]$ و سرعت لحظه‌ای را در لحظه $t = 2$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$$

۱ پاسخ:

$$f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(2) = 2(2) - 1 = 3$$



۳۸۷ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$f(x) = \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$f'(x) = \frac{\frac{9(x+1)-1(9x-2)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}}$$

پاسخ: ۱

۳۸۸ اگر $f(x) = \begin{cases} ax+1 & x < 0 \\ x^2+3x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته است.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= 3 \\ f'_-(0) &= a \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

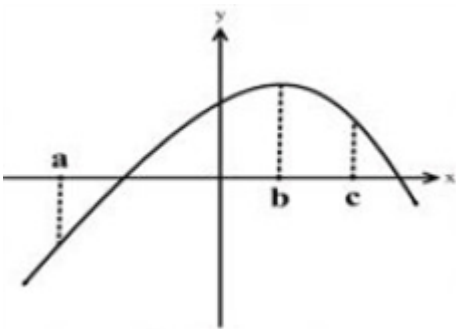
۳۸۹ اگر توابع f, g مشتق‌پذیر باشند و $f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6$ حاصل $(fg)'(2)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 5 \times 8 + 3(-6) = 22$$

پاسخ: ۱

۳۹۰ با توجه به نمودار تابع f ، اگر شیب خط مماس در نقاط a, b, c به ترتیب با m_c, m_b, m_a نمایش داده شود. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



$$m_c = m_b = m_a \quad \text{۴}$$

$$m_a > m_b > m_c \quad \text{۳}$$

$$m_b > m_a > m_c \quad \text{۲}$$

$$m_c > m_b > m_a \quad \text{۱}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳۹۱ اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t$ بر حسب متر باشد. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$f'(t) = 3t^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow t = 1$$

پاسخ: ۱



۳۹۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (-3x^2 + x)^5 (2x)$

ب) $g(x) = 5 \operatorname{tg} x + \sin x^2$

پ) $h(x) = \frac{2}{x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

الف) $f'(x) = 5(-6x + 1)(-3x^2 + x)^4 (2x) + (2)(-3x^2 + x)^5$

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = 5(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 2x \cos x^2$

پ) $h'(x) = \frac{-2}{x^2}$

۳۹۳ برای تابع $f(x) = x^3 - 8$ در نقطه تقاطع آن با محور x ها معادله خط مماس را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$

پاسخ: ۱

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow m = f'(2) = 12, y - 0 = 12(x - 2) \Rightarrow y = 12x - 24$

۳۹۴ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |2x - 4|$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2x - 4|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = 2$

$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2x - 4|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2 \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2)$

۳۹۵ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی باشد آنگاه $f'(a)$ وجود ندارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ درست

۳۹۶ دوچرخه‌سواری طبق معادله $d(t) = \frac{1}{3}t^3 + 10t$ حرکت می‌کند که در آن $0 \leq t \leq 6$ برحسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای

در $t = 2$ چه قدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$d'(t) = t^2 + 10 \Rightarrow d'(2) = 14$

پاسخ: ۱



۳۹۷ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (x^2 - 6)^3 \left(\frac{1}{4}x + 1 \right)$

ب) $g(x) = \sin^2(5x)$

پ) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x + 1}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

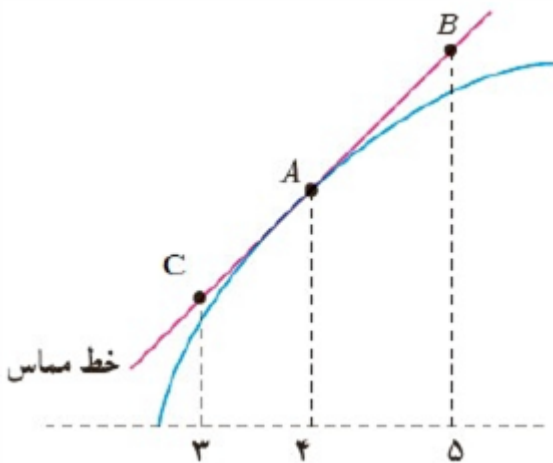
الف) $f'(x) = 3(2x)(x^2 - 6)^2 \left(\frac{1}{4}x + 1 \right) + \frac{1}{4}(x^2 - 6)^2$

ب) $g'(x) = 10 \sin^2(5x) \cos(5x)$

پ) $h'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)(x^3 - 2x + 1) - (3x^2 - 2)(\sqrt{x})}{(x^3 - 2x + 1)^2}$

پاسخ: ۱

۳۹۸ برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل مختصات نقاط B و C را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$A(4, 25) \Rightarrow 1/5 = \frac{y_B - 25}{5 - 4}$

$B(5, 26/5), C(3, 22/5)$

پاسخ: ۱

۳۹۹ در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x + 2 & x \geq -1 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(-1)$ و $f'_-(-1)$ موجودند، ولی $f'(-1)$ موجود نیست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ $f'(-1)$ موجود نیست.

$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x+2-1}{x+1} = 1$

$\Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$

$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$

۴۰۰ جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- اگر $f'(5) = 2$ و $g'(5) = -1$ در این صورت $(2f - g)'(5)$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ ۵



۴۰۱ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} \Rightarrow f'(t) = 2t - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$

پاسخ: ۱

۴۰۲ اگر توابع f, g مشتق‌پذیر باشند و $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مقادیر $(3f + 2g)'(1)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$3f'(1) + 2g'(1) = 9 + 10 = 19$$

پاسخ: ۱

۴۰۳ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$f(x) = (x^2 + 2x - 1)^5 \quad \text{الف} \quad g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2 + 1) \quad \text{ب}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$\text{الف} \quad f'(x) = 5(x^2 + 2x - 1)^4 (2x + 2)$$

$$\text{ب} \quad g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right) (x^2 + 1) + (\sqrt{3x+2})(2x)$$

پاسخ: ۱

۴۰۴ مشتق‌پذیری تابع مقابل را در نقطه $x = -1$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - (-1)} = -2$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + 6 - 4}{x - (-1)} = 2$$

$$\Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$$

پاسخ: ۱ تابع در $x = 1$ پیوسته است.

$f'(-1)$ موجود نیست.

۴۰۵ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ متوسط قد کودکان تا شصت ماهگی را نشان می‌دهد که در آن مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.

الف) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه‌ی زمانی $[0, 25]$ چه قدر است؟

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چه قدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{الف) آهنگ تغییر متوسط} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}$$

$$\text{ب) آهنگ لحظه‌ای} \quad f'(49) = \frac{7}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2}$$

پاسخ: ۱

۴۰۶ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5 \quad \text{الف} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+2}} \quad \text{ب}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{الف} \quad f'(x) = 5(x^2 + 2x + 1)^4 (2x + 2)$$

$$\text{ب} \quad g'(x) = \frac{(1)(\sqrt{3x+2}) - \frac{2x}{2\sqrt{3x+2}}}{(\sqrt{3x+2})^2}$$

پاسخ: ۱



۴۰۷ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

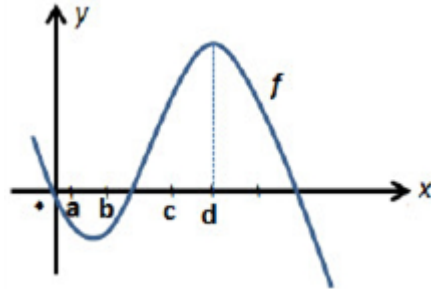
پاسخ: ۱ تابع در $x = 0$ پیوسته است.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ پس مشتق تابع در $x = 0$ موجود نیست.

۴۰۸ با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طول‌های a, b, c, d را با مشتق‌های داده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

x	a	b	c	d
$f'(x)$	-۰/۵	۰/۵	۲	۰

پاسخ: ۱

۴۰۹ تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{240}{t}$ مفروض است. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در لحظه $t = 4$ از آهنگ متوسط تغییر تابع f از لحظه $t = 3$ تا $t = 5$ چه مقدار بیش‌تر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} \Rightarrow f'(t) = \frac{-240}{t^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{-240}{16} = -15$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{48 - 80}{2} = -16$$

$$-15 - (-16) = 1$$

پاسخ: ۱

۴۱۰ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

ب) $g(x) = 3x(x^2 - 6x)^3 + \cos 2x$

الف) $f(x) = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{x^2 + \sqrt{x}}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

الف) $f'(x) = \frac{\left(2 \cos \frac{x}{2}\right)(x^2 + \sqrt{x}) - \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)}{(x^2 + \sqrt{x})^2}$

ب) $g'(x) = 3 \times (x^2 - 6x)^3 + (3 \times (2x - 6)(x^2 - 6x) \times 3x - 2 \sin 2x)$

پاسخ: ۱



۴۱۱ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 4x(1 - |x|)$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 4x^2 & x \geq 0 \\ 4x + 4x^2 & x < 0 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x - 4x^2}{x} = 4$$

تابع مشتق‌پذیر است $\Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0)$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x + 4x^2}{x} = 4$$

۴۱۲ جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- شیب خط مماس بر منحنی $y = 1 - 5x^2 - 2x$ در نقطه‌ای به طول ۲- واقع بر آن برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ ۱۸

۴۱۳ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ نادرست

۴۱۴ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (\sqrt{3x+1})(2x^3 - 1)$

ب) $g(x) = 3 \operatorname{tg}^2 x + \cos x^2$

پ) $h(x) = \frac{x^2 - 3x}{5x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

الف) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}}(2x^3 - 1) + (\sqrt{3x+1})(6x^2)$

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = 6 \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 2x(-\sin x^2)$

پ) $h'(x) = \frac{(2x-3)(5x) - (5)(x^2-3x)}{(5x)^2}$

۴۱۵ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنید

ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. مطلوب است:

الف) سرعت متوسط در بازه $[1, 2]$ ب) سرعت لحظه‌ای در زمان $t = 3$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

الف) $\frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25$ سرعت متوسط

پاسخ: ۱

ب) $h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow h'(3) = 10$ سرعت لحظه‌ای



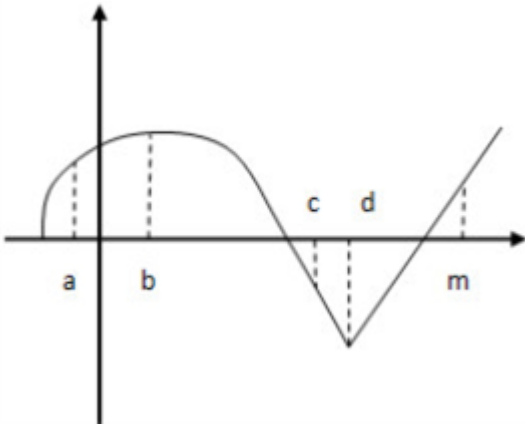
۴۱۶

با توجه به نمودار f به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید.

ب) طول نقطه «گوشه‌ای» را بنویسید.

پ) طول نقطه‌ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، را بنویسید.



سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

الف) $x = b$ ب) $x = d$ پ) $x = c$

پاسخ: ۱

۴۱۷) معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^3 - 2x$ را در نقطه $A(1, f(1))$ به دست آورید.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$f(1) = -1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 1 \Rightarrow y = x - 2$$

پاسخ: ۱

۴۱۸) جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

- اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a است.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ پیوسته

۴۱۹) جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از

سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید:الف) سرعت متوسط جسم را در بازه $[5, 8]$ به دست آورید.ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم $\frac{m}{s}$ ۳۵ است.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\text{الف) } \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - (75)}{8 - 5} = -25$$

$$\text{ب) } h'(t) = -10t + 40 = 35 \Rightarrow t = 0.5$$

پاسخ: ۱

۴۲۰) مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$\text{ب) } g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$$

$$\text{الف) } f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$$

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

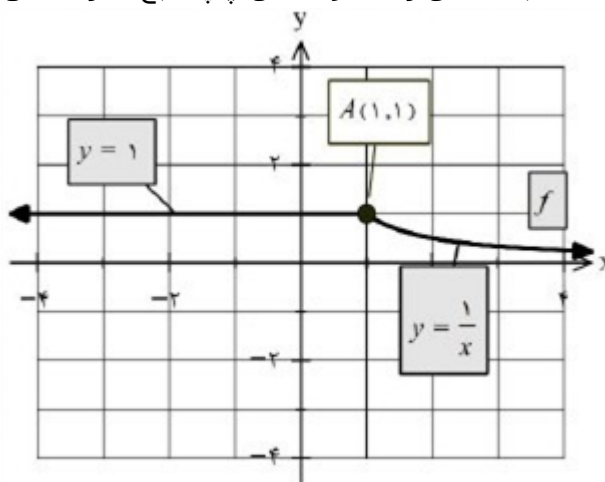
$$\text{الف) } f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$\text{ب) } g'(x) = (6x)(2x - 5)^3 + (3)(2)(2x - 5)^2(3x^2 - 4)$$

پاسخ: ۱



۴۲۱ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه‌ی A ، نشان دهید که تابع f در نقطه A مشتق‌پذیر نیست.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = -1$$

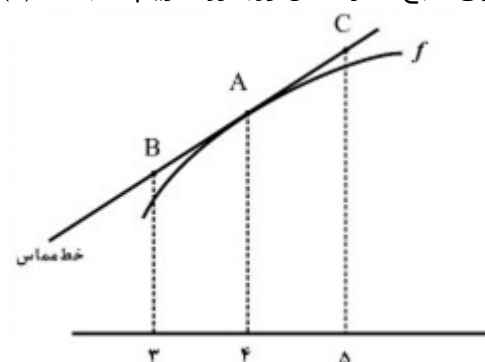
$$\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \cdot$$

پاسخ: ۱

$f'(1)$ موجود نیست.

۴۲۲ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 1/5 \Rightarrow B(3, 22/5)$$

$$\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 1/5 \Rightarrow C(5, 25/5)$$

پاسخ: ۱

۴۲۳ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
اگر $h(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1$ باشد، آن‌گاه $h''(1)$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ ۴۰

۴۲۴ درست یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
اگر خط $x = a$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $(a, f(a))$ باشد آن‌گاه $f'(a)$ موجود است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست



۴۲۵

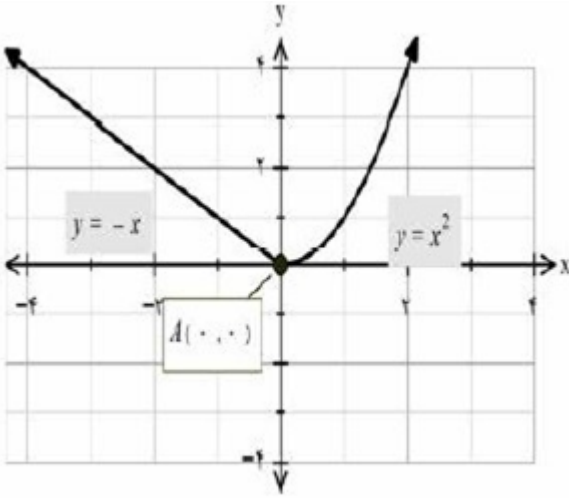
معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4 \Rightarrow f'(t) = 2t - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$

پاسخ: ۱

۴۲۶ با محاسبه مشتق چپ و راست تابع داده شده در نقطه A، نشان دهید این تابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیست.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$$\Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

پاسخ: ۱

$f'(0)$ موجود نیست.

۴۲۷

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

ب) $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2+1)$

الف) $f(x) = \left(\frac{x^2}{3x-1} \right)^5$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

الف) $f'(x) = 5 \left(\frac{x^2}{3x-1} \right)^4 \left(\frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2} \right)$

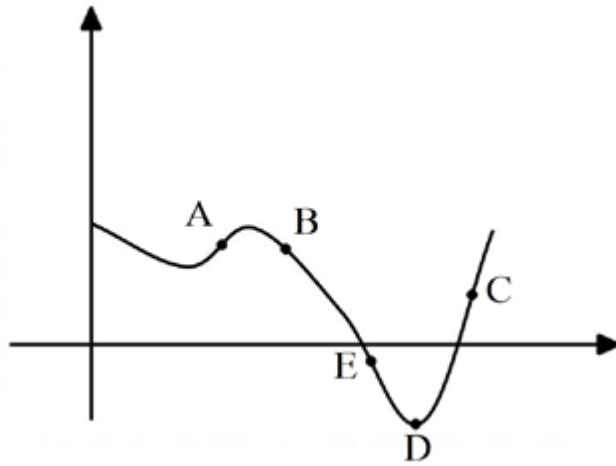
ب) $g'(x) = \left(\frac{2}{2\sqrt{3x+2}} \right)(x^2+1) + 2x^2(\sqrt{3x+2})$

پاسخ: ۱



نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یک نقطه اضافی است)

شیب	نقطه
-۳	
-۱	
۰	
۱	



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

نقطه	A	D	B	E
شیب	۱	۰	-۱	-۳

پاسخ: ۱

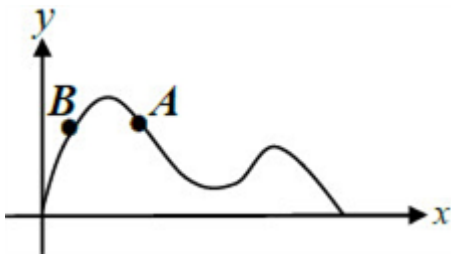
جسمی از سطح زمین به طور عمودی پرتاب شده است، که معادله ارتفاع آن از سطح زمین به صورت $f(t) = -2t^2 + 10t$ می‌باشد. سرعت لحظه‌ای این جسم را در $t = 2$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$f'(t) = -4t + 10 \Rightarrow f'(2) = -8 + 10 = 2$$

پاسخ: ۱

در نمودار $y = f(x)$ شیب نمودار در نقاط A, B و شیب خط AB را، از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$m_A < m_{AB} = 0 < m_B \quad (\text{ص ۸۲})$$

پاسخ: ۱

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$g(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = (4x^3 - 7)(2x - 1)^4 \quad (\text{الف})$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\text{الف) } f'(x) = (12x^2)(2x - 1)^4 + 4(2x - 1)^3(2)(4x^3 - 7)$$

$$\text{ب) } g'(x) = \frac{-\cos x (\cos x) - (-\sin x)(1 - \sin x)}{\cos^2 x}$$

پاسخ: ۱

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

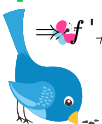
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2 = f(1) \quad \text{تابع پیوسته است.}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = 2, \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = 2$$

$$\Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) = 2 \quad \text{تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است.}$$

پاسخ: ۱



۴۳۳

در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.
اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ پیوسته

۴۳۴

در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید.
سرعت لحظه‌ای در $t = 9$ برای متحرکی با معادله حرکت $f(t) = \sqrt{t}$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ $\frac{1}{6}$

۴۳۵

درستی یا نادرستی عبارت زیر را بنویسید.
خط $x = 1$ مماس قائم منحنی $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست

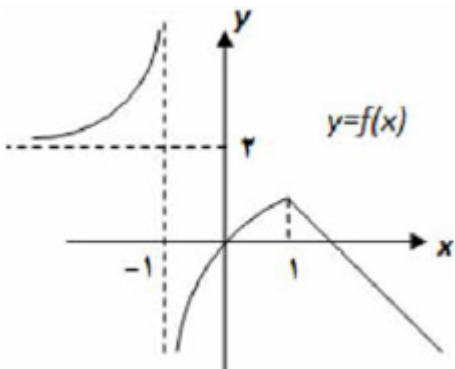
۴۳۶

با توجه به نمودار $y = f(x)$.
الف) حدود خواسته شده را بنویسید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$$

ب) تابع $y = f(x)$ در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده، مشتق‌پذیر نیست؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ الف) 2 و $-\infty$

ب) تابع در $x = -1, x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

۴۳۷

خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله‌ی $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ بر حسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چه قدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$d'(t) = -10t + 20 \Rightarrow d'(2) = 0$$

پاسخ: ۱



۴۳۸

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x}} \quad \text{الف)} \quad g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(x^2 + 5x)^5 \quad \text{ب)}$$

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$\text{الف)} \quad f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$\text{ب)} \quad g'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)(x^2 + 5x)^5 + \left(\frac{1}{x}\right)(5(2x+5)(x^2 + 5x)^4)$$

۴۳۹

تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ داده شده است:الف) نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.

پاسخ: ۱ الف)

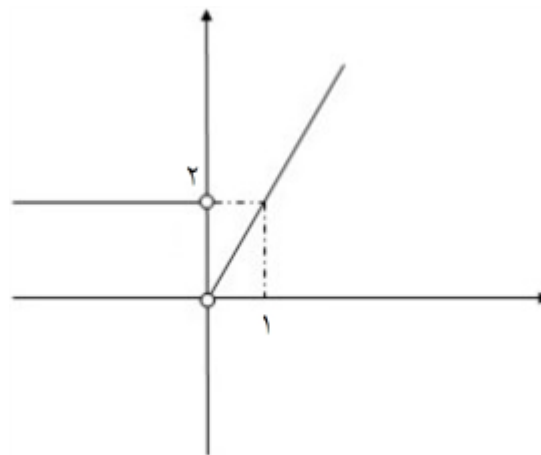
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 0}{x - 0} = 2$$

$$f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

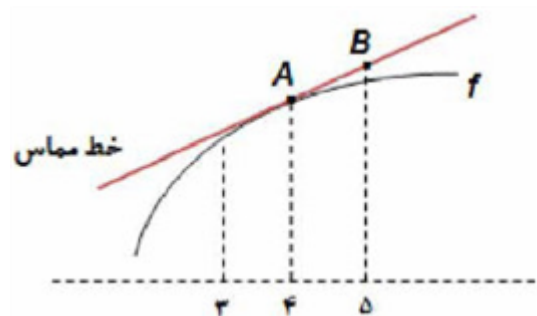
مشتق راست و چپ در $x = 0$ برابر نیست در نتیجه تابع در $x = 0$ مشتق ناپذیر است.

$$\text{ب)} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$



پ)

۴۴۰

برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(4) = \frac{3}{4}$ و $f(4) = 27$. با توجه به شکل، مختصات نقطه B را بیابید.

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$A(4, 27)$$

$$\frac{3}{4} = \frac{y_B - 27}{5 - 4} \Rightarrow B(5, 27/4 + 27)$$



۴۴۱ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

پس تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد. $f'_-(0) \neq f'_+(0)$

پاسخ: ۱

۴۴۲ اگر $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ مقدار $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ را حساب کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 2 \sin 2x$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$$

پاسخ: ۱

۴۴۳ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2+1)$

ب) $g(x) = (x^2+3x+1)^5$

پ) $h(x) = \frac{x^2-5x+7}{-2x+9}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

الف) $f'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^2+1) + (3x^2)(\sqrt{3x+2})$

ب) $g'(x) = 5(2x+3)(x^2+3x+1)^4$

پ) $h'(x) = \frac{(2x-5)(-2x+9) - (-2)(x^2-5x+7)}{(-2x+9)^2}$

پاسخ: ۱

۴۴۴ اگر $f(x) = x^2 - 3x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $f'(1)$ را حساب کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$$

پاسخ: ۱

۴۴۵ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست. خط $x = 0$ را منحنی می‌نامیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ مماس قائم

۴۴۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق‌پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست



۴۴۷

در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید.
اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ ، در این صورت $(1)'(3f + 2g)$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ ۱۹

۴۴۸

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست

۴۴۹

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد آن گاه f در a مشتق پذیر هم نیست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

۴۵۰

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.
الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $1 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟
ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 4$ چه قدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

الف) $\Delta m = 130 - 3 = 127$

پاسخ: ۱

ب) $m'(4) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \xrightarrow{t=4} \frac{1}{4} + 96$

۴۵۱

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).
الف) $f(x) = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^4$
ب) $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(\sqrt{3x+2})$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

الف) $f'(x) = 4 \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^3 \times \left(\frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x+1)}{(x^2+5)^2}\right)$

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)(\sqrt{3x+2}) + \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)$

۴۵۲

به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در نقطه $x = -2$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ تابع در $x = -2$ پیوسته است.

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2-4|}{x+2} = 4$$

$$\Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2)$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^2-4|}{x+2} = -4$$

$f'(-2)$ موجود نیست.

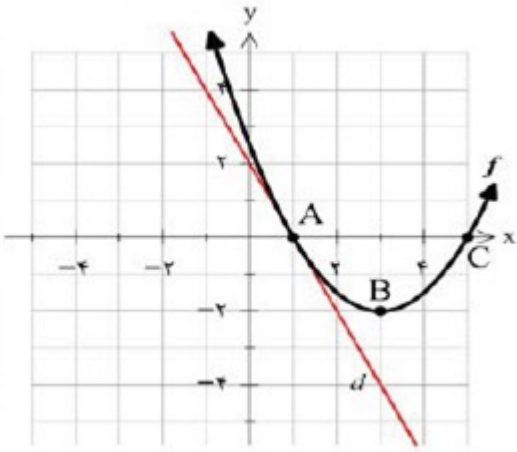


۴۵۳

در نمودار مقابل خط d در نقطه $x = 1$ بر نمودار f مماس شده است:

الف) مشتق تابع f را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

الف) $f'(1) = \frac{2-0}{0-1} = -2$

ب) $m_B < m_C$

پاسخ: ۱

۴۵۴

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = -2$$

پس تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد $f'_-(1) \neq f'_+(1)$

پاسخ: ۱

۴۵۵

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

ب) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$

پ) $h(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

الف) $f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+2) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$

ب) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2+5) + \sqrt{x}(6x)$

پ) $h'(x) = 2 \times \sin^2 x \times \cos x + 2 \cos x \times (-\sin x)$

پاسخ: ۱

۴۵۶

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$f'(x) = -2x + 10, f'(2) = 6, f(2) = 16$

$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$

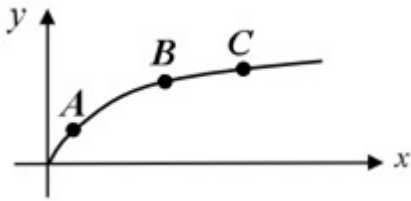
پاسخ: ۱



۴۵۷

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

با توجه به شکل روبه‌رو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه بزرگ‌تر از شیب خط مماس بر منحنی در نقطه B است.

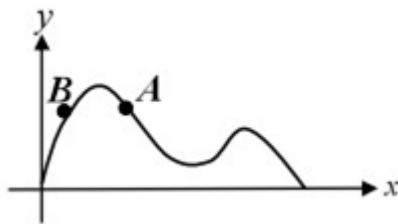


سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ A (۰/۲۵)

۴۵۸

درست یا نادرست بودن عبارت زیر را تعیین کنید.



سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ نادرست (۰/۲۵)

۴۵۹

در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

اگر $f'(2) = -1$ و $g'(2) = 3$ ، در این صورت $(2f + 3g)'(2)$ برابر با است.

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ ۷

۴۶۰

تابع $f(x) = 5\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه‌ی زمانی $[0, 25]$ چه قدر است؟

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = 1.4$$

پاسخ: ۱

۴۶۱

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

$$\Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

پاسخ: ۱

 $f'(0)$ موجود نیست.

۴۶۲ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

ب) $g(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$

الف) $f(x) = (x^2+1)^2(5x-1)$

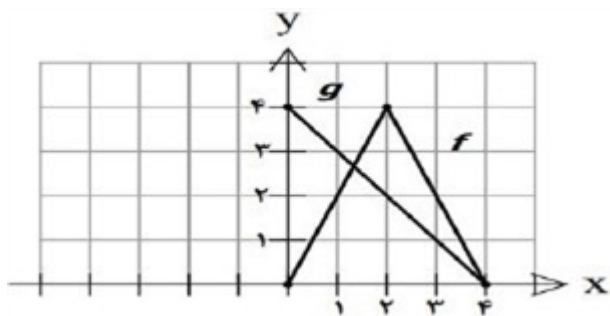
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

الف) $f'(x) = 2(2x)(x^2+1)^2(5x-1) + 5(x^2+1)^2$

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - (\frac{1}{2\sqrt{x}})(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$

۴۶۳ نمودار تابع f, g را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(1)$ را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{g^2(1)} = \frac{2 \times 2 - (2)(-1)}{4} = \frac{5}{2}$

پاسخ: ۱

۴۶۴ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

ب) $g(x) = \sin^2(2x+1)$

الف) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-2x^2}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

الف) $y' = \frac{2(x^2-2x^2) - (2x^2-4x)(2x+3)}{(x^2-2x^2)^2}$

پاسخ: ۱

ب) $y' = 2 \times 2 \sin(2x+1) \cos(2x+1)$

$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & x \geq 1 \\ 2x+1 & x < 1 \end{cases}$

۴۶۵ مشتق‌پذیری تابع مقابل را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+3-4}{x-1} = 2$

پاسخ: ۱

$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1-4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x-1} = 2 \Rightarrow f'_-(1) \neq f'_+(1)$

بنابراین تابع f را در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست.

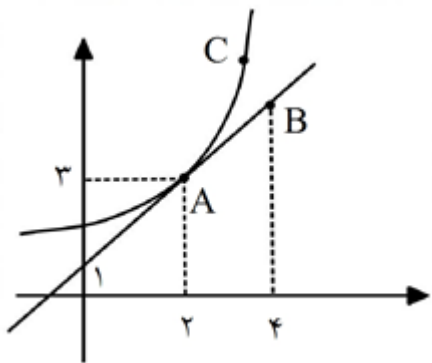


۴۶۶

در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)$ و خط مماس بر منحنی آن در نقطه‌ی $x = 2$ داده شده است:

الف) مشتق تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x = 2$ را بیابید.

ب) معادله خط مماس بر نمودار تابع در نقطه A را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

$$f'(2) = \frac{3-1}{2-0} = 1$$

پاسخ: ۱

۴۶۷

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$$

پاسخ: ۱

۴۶۸

مشتق تابع $y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x} - 1)^4$ را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$y' = \frac{-1}{x^2} \times (2\sqrt{x} - 1)^4 + 4(2\sqrt{x} - 1)^3 \times \left(\frac{2}{2\sqrt{x}} - 0 \right) \times \frac{1}{x}$$

پاسخ: ۱

۴۶۹

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$f'_+(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'_+(1) = 3$$

$$f'_-(x) = 3 \Rightarrow f'_-(1) = 3$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) = 3$$

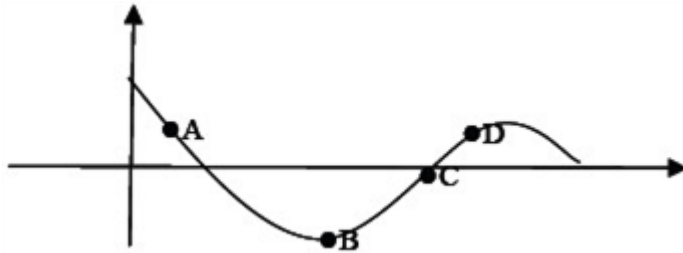
پاسخ: ۱

در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است.



نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲
نقطه				



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲
نقطه	C	B	D	A

پاسخ: ۱

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ در نقطه $x = 2$ چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = -1$ است؟ (۴۷۱)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاسخ: ۱ ۱۳ برابر، زیرا:

$$f'(x) = 6x^2 + 5 \Rightarrow \begin{aligned} f'(-1) &= 1 \\ f'(2) &= 13 \end{aligned}$$

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (۴۷۲)

الف) $f(x) = (2x^3 + \sqrt[3]{x} - 1)^4$

ب) $g(x) = \cos\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

الف) $f'(x) = 4(2x^3 + \sqrt[3]{x} - 1)^3 \left(6x^2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right)$

ب) $g'(x) = -\sin\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) \times \frac{(x^2 + 1) - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$

پاسخ: ۱

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = 2$ بررسی کنید. (۴۷۳)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = -4 \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2)$$

پاسخ: ۱

تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.



۴۷۴

با توجه به نمودار داده شده، گزینه مناسب را انتخاب کنید.

(i) در کدام نقطه مماس افقی بر نمودار رسم می‌شود؟

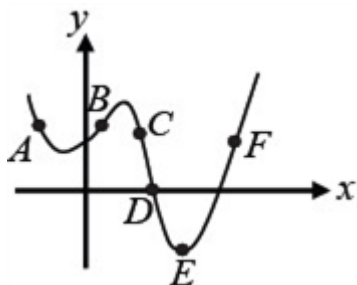
الف) B ب) E

(ii) شیب خط مماس در نقطه F چه علامتی دارد؟

الف) مثبت ب) منفی

(iii) شیب خط مماس بر نمودار، در نقطه D نسبت به نقطه B چگونه است؟

الف) بیشتر ب) کمتر



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

(iii) ب (کمتر)

(ii) الف (مثبت)

۱ پاسخ: (i) ب (E)

۴۷۵

معادله ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ ، برحسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0, 4]$ با هم برابرند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{28 - 0}{4} = 7 \Rightarrow f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow 4t - 1 = 7 \Rightarrow t = 2$$

۱ پاسخ:

۴۷۶

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = (x^4 - 3x)^5$

ب) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

الف) $f'(x) = 5 \underbrace{(x^4 - 3x)^4}_{\cdot/25} \underbrace{(4x^3 - 3)}_{\cdot/25}$

ب) $g'(x) = \frac{\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\cdot/25} (1-x) - \underbrace{(-1)\sqrt{x}}_{\cdot/25}}{(1-x)^2}$

۱ پاسخ:



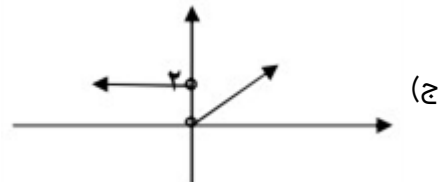
۴۷۷ تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

- الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.
 ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.
 ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

۱ پاسخ: الف) در $x = 0$ گوشه‌ای و مشتق ناپذیر است. $0/5$ (در صورتی که با مقدار مشتق چپ و راست بررسی کند نمره
 تعلق می‌گیرد)

ب) $f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$ $0/5$



۴۷۸ مشتق تابع $f(x) = x^3 - 2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x = -1$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3$$

$\underbrace{\quad}_{0/25} \quad \underbrace{\quad}_{0/25} \quad \underbrace{\quad}_{0/25} \quad \underbrace{\quad}_{0/25}$

۱ پاسخ:

۴۷۹ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^3 - 2x$ را در بازه $[0, 2]$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را در $x = 1$ محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2 \quad (0/25)$$

$\underbrace{\quad}_{(0/25)}$

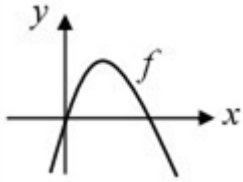
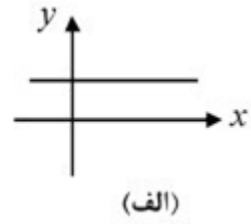
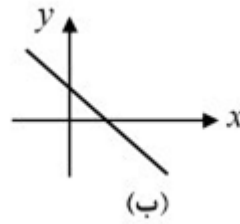
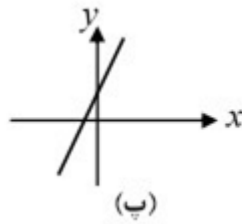
۱ پاسخ:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \quad (0/25) \Rightarrow f'(1) = 1 \quad (0/25)$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای



با بیان دلیل، مشخص کنید کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار مشتق تابع f است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ نمودار (ب) $(۰/۲۵)$. سهمی نمودار داده شده ماکزیمم دارد. پس ضریب x^2 منفی است. $(۰/۲۵)$ لذا در مشتق تابع ضریب x منفی خواهد بود. در نتیجه نمودار مشتق، خطی با شیب منفی است. $(۰/۲۵)$

۴۸۱ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$

ب) $g(x) = \cos^2(2x)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

الف)
$$f'(x) = \frac{\overbrace{2x(x^2 + 2x + 1)}^{(۰/۲۵)} - \overbrace{(x^2 - 1)(2x + 2)}^{(۰/۲۵)}}{\underbrace{(x^2 + 2x + 1)^2}_{(۰/۲۵)}}$$

ب)
$$g'(x) = \underbrace{-2}_{(۰/۲۵)} \underbrace{\cos^2(2x)}_{(۰/۲۵)} \underbrace{\sin(2x)}_{(۰/۲۵)}$$

پاسخ: ۱

۴۸۲ قضیه: ثابت کنید اگر تابع f در $x = \alpha$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه تابع f در $x = \alpha$ پیوسته است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ کافی است نشان دهیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)}_{(۰/۲۵)} = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{(۰/۲۵)}$$

$$= 0 \times f'(a) = 0 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (۰/۲۵)$$



۴۸۳ نشان دهید نقطه‌ای به طول $x = -1$ ، نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x) = |x^2 + x|$ می‌باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ تابع f در $x = -1$ پیوسته است. (۰/۲۵)

$$f'_{+}(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{|x^2 + x|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-x(x+1)(0/25)}{x+1} = 1(0/25)$$

$$f'_{-}(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)(0/25)}{x+1} = -1(0/25)$$

مشتق‌های راست و چپ تابع هر دو متناهی ولی نابرابرند. (۰/۲۵) پس $x = -1$ نقطه گوشه‌ای تابع است.

سوال ۱۱۹

فصل پنجم

۴۸۴ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

نقطه به طول c از دامنه تابع f که در آن $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد را یک نقطه می‌نامیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ بحرانی

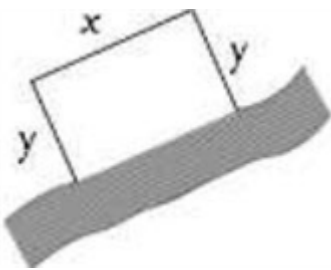
۴۸۵ جای خالی را با توجه به عبارت‌های داخل پرانتز، کامل کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

نقطه‌ای به طول $x = 2$ ، نقطه تابع $f(x) = [x]$ است. (ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ ماکزیمم نسبی

۴۸۶ می‌خواهیم مطابق شکل مقابل، سه ضلع یک محوطه به شکل مستطیل را در کنار رودخانه نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، به کمک جدول تغییرات، بیشترین مساحت ممکن برای این مستطیل را محاسبه کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$x + 2y = 100 \Rightarrow x = 100 - 2y$$

$$S = x \cdot y = (100 - 2y)y = 100y - 2y^2$$

$$S'(y) = 100 - 4y = 0 \Rightarrow y = 25$$

$$S_{\max} = 50 \times 25 = 1250$$

y	0	25	50
S'	+	-	
S	0	↗	↘ 0

پاسخ: ۱

تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ را در نظر بگیرید.

الف) بزرگ‌ترین بازه از x که تابع f در آن نزولی اکید است را به دست آورید.

ب) طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

پاسخ: ۱ الف) $[-2, 2]$

x	-2	2
f'	+	-
f	↗	↘

ب) طول ماکزیمم نسبی: $x = -2$

۴۸۸ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ تعیین محل برخورد با محورها (به صورت جبری، به صورت مختصاتی، در جدول رفتار و یا بر روی نمودار) هر کدام

تعلق گیرد. $x = 0 \Rightarrow f(0) = -4, y = 0 \Rightarrow x = -2$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+4}{x-1} = 2$ یا $y = \frac{a}{c} = 2$ در نتیجه $y = 2$ مجانب افقی تابع است.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+4}{x-1} = -\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+4}{x-1} = +\infty$ یا $x = \frac{-d}{c} = 1$ در نتیجه $x = 1$ مجانب قائم است.

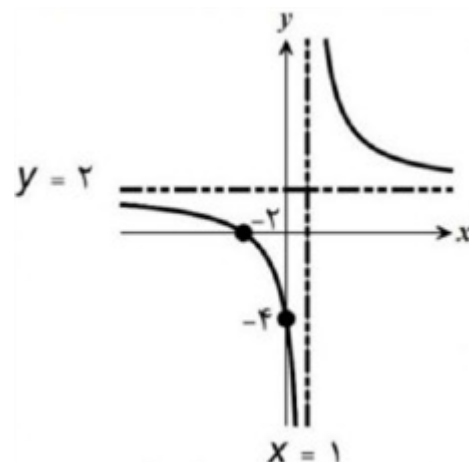
x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
f'	-	-	-	-	-
f''	(-)	(-)		(+)	
f	↘ 2	↘ 0	↘ 4	↘ $-\infty$	↘ 2

$$f'(x) = \frac{-6}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{12}{(x-1)^3}$$

محاسبه مشتق اول و تعیین علامت آن در جدول

محاسبه مشتق دوم، تعیین علامت آن و مشخص کردن جهت تقعر در جدول



مقادیر a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ طوری به دست آورید که $x = 2$ ، طول نقطه اکسترمم نسبی و $x = 0$ ، طول نقطه عطف این تابع باشد.

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\begin{cases} f''(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -12$$

مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = \frac{-2}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1$ را در بازه $[-3, 2]$ به دست آورید.

پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

$$f'(x) = -2x^2 - 2x + 4 \xrightarrow{f'=0} x = -2, x = 1$$

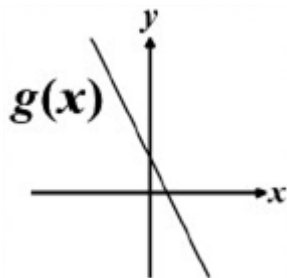
در نتیجه نقاط $x = -2$ و $x = 1$ نقاط بحرانی تابع هستند.

$$f(1) = \frac{10}{3}, f(-2) = \frac{-17}{3}$$

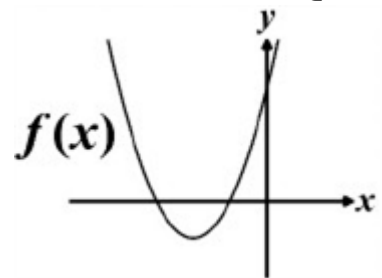
$$f(-3) = -2, f(2) = -\frac{1}{3}$$

مقدار ماکزیمم مطلق تابع f برابر $y = \frac{10}{3}$ و مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر $y = \frac{-17}{3}$ است.

نمودار توابع f و g به صورت زیر است.

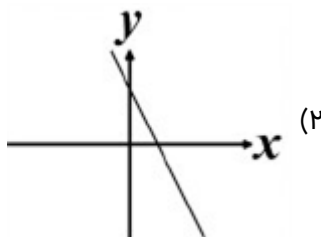


(ب)

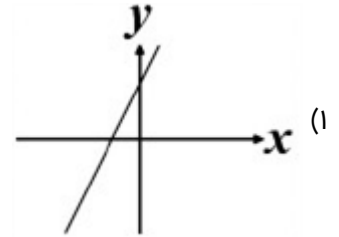


(الف)

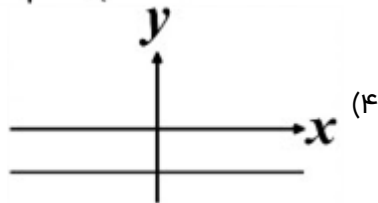
نمودار مشتق هر کدام از توابع f و g را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید. سپس شماره مربوط به آن را بنویسید. (دو نمودار اضافه است.)



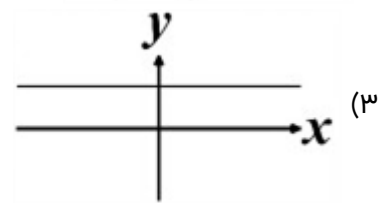
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

(ب) نمودار شماره ۴

پاسخ: ۱ (الف) نمودار شماره ۱

جای خالی را با توجه به عبارتهای داخل پرانتز، کامل کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)
مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 1$ برابر است. (صفر، یک)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

پاسخ: ۱ صفر

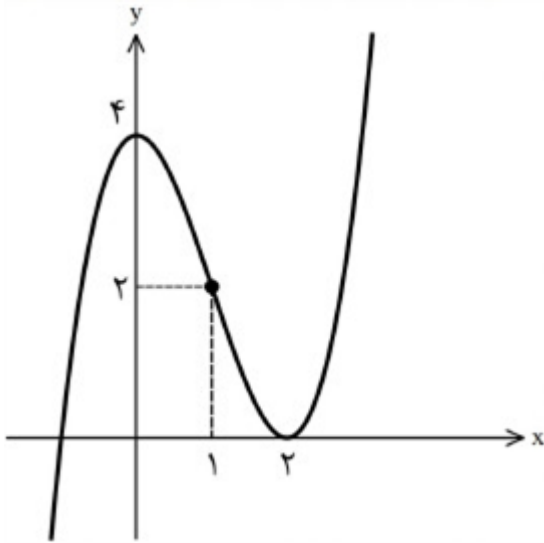


جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = (x+1)(x-2)^2$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = (x-2)^2 + 2(x-2)(x+1) \xrightarrow{f'(x)=0} x=0, x=2$$

$$f''(x) = 6x - 6 \xrightarrow{f''(x)=0} x=1$$

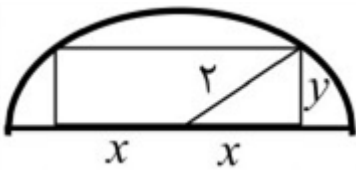


		0	1	2	
f'	+	0	-	-	+
f''					
f					

پاسخ: ۱

یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۲ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳



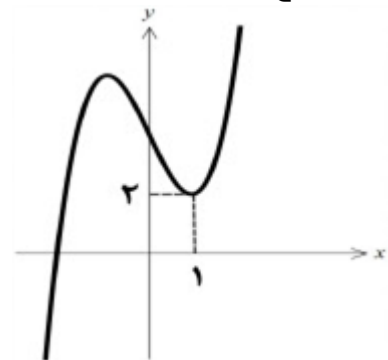
پاسخ: ۱ با توجه به شکل $y^2 + x^2 = 4$ ، پس $y = \sqrt{4 - x^2}$ در نتیجه:

$$S = 2xy \xrightarrow{y=\sqrt{4-x^2}} S(x) = 2x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow S'(x) = 2\sqrt{4-x^2} + \frac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}(2x)$$

$$\xrightarrow{S'(x)=0} \frac{2(4-x^2) - 2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow -4x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow 2x = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2}$$

نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ به صورت زیر است. مقدار a و b را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = 3x^2 + a \xrightarrow{f'(1)=0} 3(1)^2 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow (1)^3 + a(1) + b = 2 \xrightarrow{a=-3} 1 - 3 + b = 2 \Rightarrow b = 4$$

پاسخ: ۱



طول مستطیلی را بیابید که مساحت آن ۱۶ سانتی‌متر مربع و محیط آن کمترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$S = ab = 16 \Rightarrow b = \frac{16}{a}$$

$$p = 2(a + b) = 2\left(a + \frac{16}{a}\right) = 2a + \frac{32}{a}$$

$$p' = 2 - \frac{32}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{32}{a^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

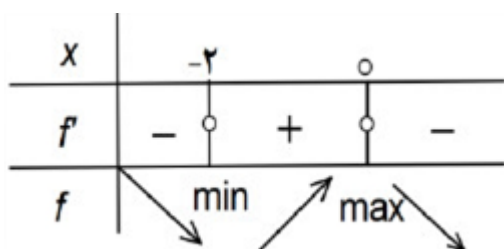
پاسخ: ۱

با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$ طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع را در صورت وجود بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = -3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(-3x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

پاسخ: ۱



$\Rightarrow$ طول نقطه ماکسیمم نسبی $x = 0$
طول نقطه مینیمم نسبی $x = -2$

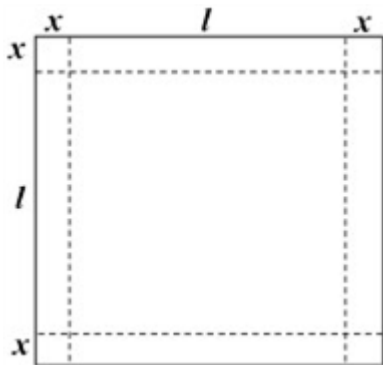
درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر نقطه اکسترمم مطلق، اکسترمم نسبی نیز هست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

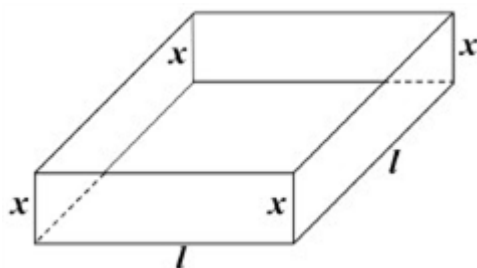
پاسخ: ۱ نادرست



ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌های مشخص شده در شکل، یک جعبه در باز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳



$$v = xl^2$$

$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x \Rightarrow v = x(30 - 2x)^2 \text{ یا } 4x^3 - 120x^2 + 900x, x \in [0, 15]$$

پاسخ: ۱

$$v'(x) = (30 - 2x)^2 + 2(-2)(30 - 2x)x = 0 \text{ یا } v'(x) = 12x^2 - 240x + 900 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ ق ق} \\ x = 15 \text{ غ ق} \end{cases}$$

x	۰	۵	۱۵
v'	+	۰	-
v	↗	↘	↗
	۰	۲۰۰۰	۰

بیشترین حجم برای $x = 5$ به دست می‌آید.

با رسم جدول تغییرات تابع، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 15x + 4$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = 2x^2 - x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

x	$-\frac{5}{2}$	۳
f'		
f	↗	↘
	max	min



جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را رسم کنید. **۵۰۱**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}, D_f = R - \{-1\}$$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}, x \neq -1$$

$$f''(x) = \frac{-6}{(x+1)^3}, x \neq -1$$

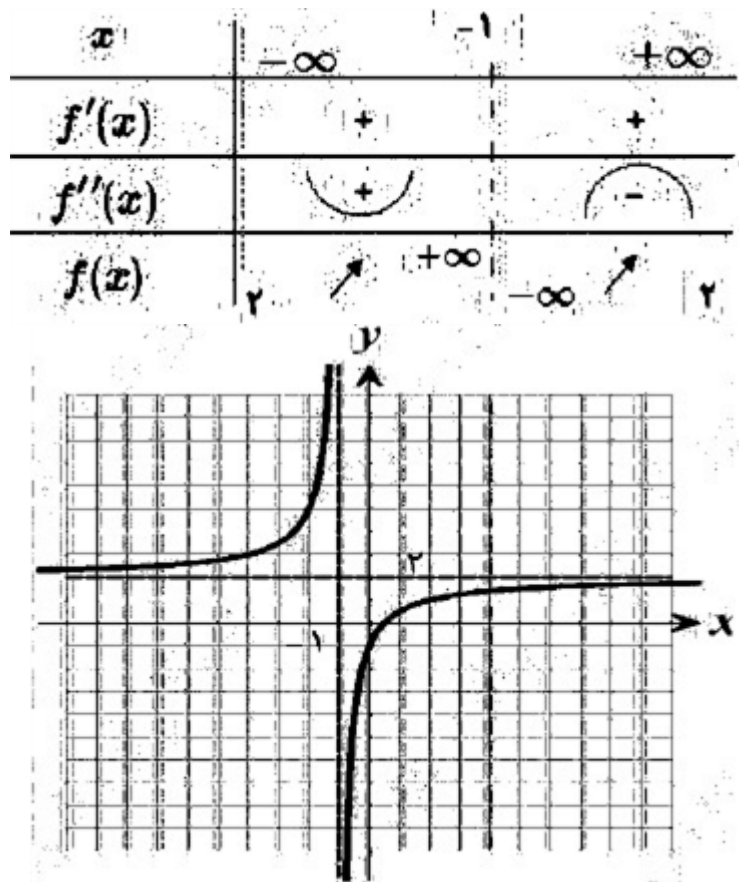
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$$

مجانِب افقی $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

مجانِب قائم $x = -1$



اگر $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 1$ باشد، مقدار a را طوری بیابید که $x = \frac{1}{2}$ طول نقطه عطف نمودار تابع باشد. **۵۰۲**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6ax + 6 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} 3a + 6 = 0 \Rightarrow a = -2$$

پاسخ: ۱



نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را در بازه $[-1, 3]$ در صورت وجود بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \xrightarrow{f'=0} 3x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \notin [-1, 3] \end{cases}$$

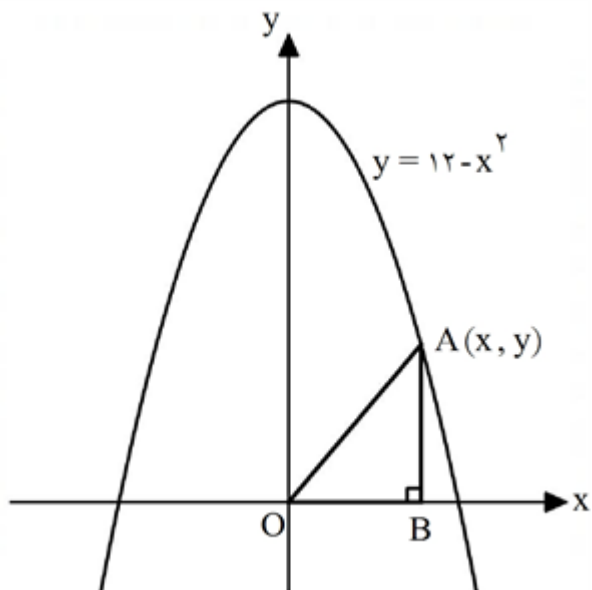
پاسخ: ۱

x	-1	0	3
f'	+	○	-
f	-7	○	-27

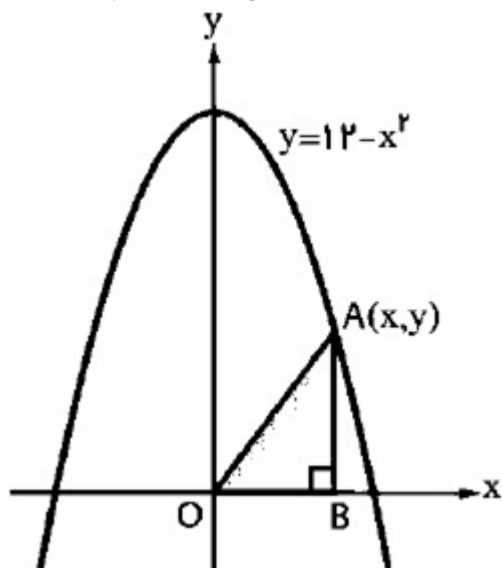
(۰, ۰) نقطهٔ ماکزیمم نسبی (۰, ۰) نقطهٔ ماکزیمم مطلق و (۳, -۲۷) نقطهٔ ماکزیمم مطلق این تابع در بازه $[-1, 3]$ است.



مطابق شکل مقابل، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 12 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم خردادماه ۱۴۰۳



$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(12 - x^2) = 6x - \frac{1}{2}x^3$$

$$\Rightarrow S'(x) = 6 - \frac{3}{2}x^2$$

$$6 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

$$\Rightarrow y = 12 - 2^2 = 8$$

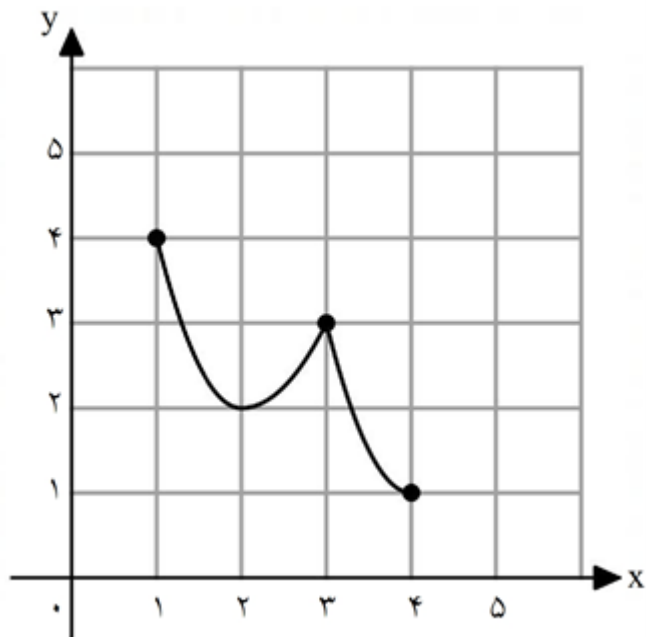
پاسخ: ۱

x	۰	۲	$\sqrt{12}$
$S'(x)$	+	-	
$S(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	

۸



۵۰۵ در نمودار زیر، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینییمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینییمم مطلق را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۳ = طول ماکزیمم نسبی

۱ = طول ماکزیمم مطلق

۲ = طول مینییمم نسبی

۴ = طول مینییمم مطلق

پاسخ: ۱

۵۰۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست



جدول رفتار و نمودار تابع $y = (x+2)(x-4)^2$ را رسم کنید. **۵۰۷**

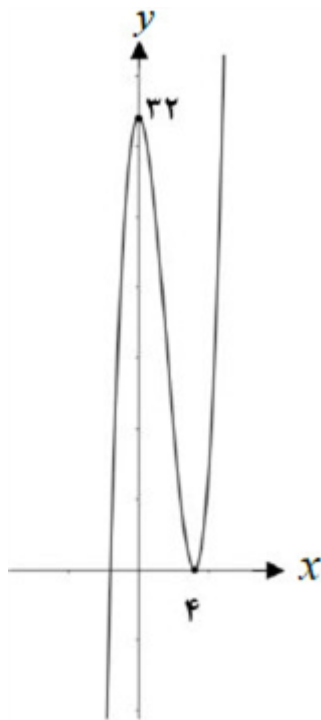
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, 4$$

پاسخ: ۱

اگر دانش‌آموزی مشتق را به صورت $y' = (x-4)(3x)$ بنویسید، بارم این قسمت تعلق گیرد.

$$y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$



x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$	
y	$-\infty$	32	16	0	$+\infty$	

ماکزیمم
عطف
مینیمم

مقادیر a ، b و c را در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ طوری به دست آورید که در نقطه $(3, -1)$ اکسترمم نسبی داشته باشد و $x = 1$ طول نقطه عطف آن باشد. **۵۰۸**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= -1 \Rightarrow 27 + 9a + 3b + c = -1 \\ f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6a + b = 0 \\ f''(x) &= 6x + 2a \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -3, b = -9, c = 26$$

پاسخ: ۱

مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 12x$ در بازه $[-1, 3]$ را به دست آورید. **۵۰۹**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ f(-1) &= 11 \\ f(2) &= -16 \\ f(3) &= -9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مقدار ماکزیمم} = 11$$

پاسخ: ۱



۵۱۰

می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و دربار بسازیم که گنجایش آن دقیقاً ۹۰۰ سانتی‌متر مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \simeq 3$)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$h = \frac{300}{r^2}$$

$$S = \frac{1800}{r} + 3r^2$$

$$S' = \frac{-1800}{r^2} + 6r = 0$$

$$r = \sqrt[3]{300} \Rightarrow h = \sqrt[3]{300}$$

پاسخ: ۱

۵۱۱

با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 27x + 1$ مشخص کنید تابع در کدام بازه‌ها اکیداً صعودی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

x		-3		3	
f'(x)	+	○	-	○	+

$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

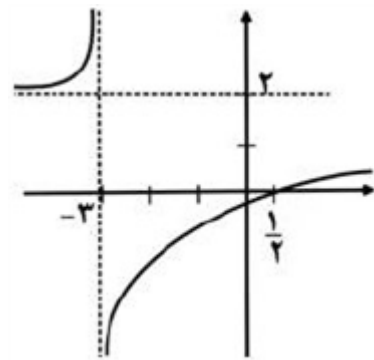
پاسخ: ۱

اکیداً صعودی $(-\infty, -3], [3, +\infty)$

۵۱۲

جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x+3}$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲



$$y' = \frac{2(x+3) - 1(2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0$$

اکیداً صعودی

مجانِب قائم $x = -3$

مجانِب افقی $y = 2$

پاسخ: ۱

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y'	+	+	+

۵۱۳

نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ ، نقطه $(1, -11)$ می‌باشد. مقدار a و b را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

$$f(1) = -11 \Rightarrow 1 + a + b = -11$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 6(1) + 2a = 0 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = -9$$

پاسخ: ۱



۵۱۴) مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را روی بازه $[-2, 3]$ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

غ ق ق $y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \notin [-2, 3]$

$f(-2) = -32, f(0) = 0, f(3) = -27$

ماکزیمم مطلق = ۰ مینیمم مطلق = -۳۲

پاسخ: ۱

۵۱۵) دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۸ باشد و حاصلضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$x - y = 8 \Rightarrow x = 8 + y$

$s = xy = (8 + y)y = y^2 + 8y$

$s' = 2y + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 4 \end{cases}$

پاسخ: ۱

۵۱۶) نقاط بحرانی تابع زیر را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را

در صورت وجود مشخص کنید. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

پاسخ: ۱

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'	-	+	-	
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
		-16 Min	11 Max	



۵۱۷ جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2$ را رسم کنید.

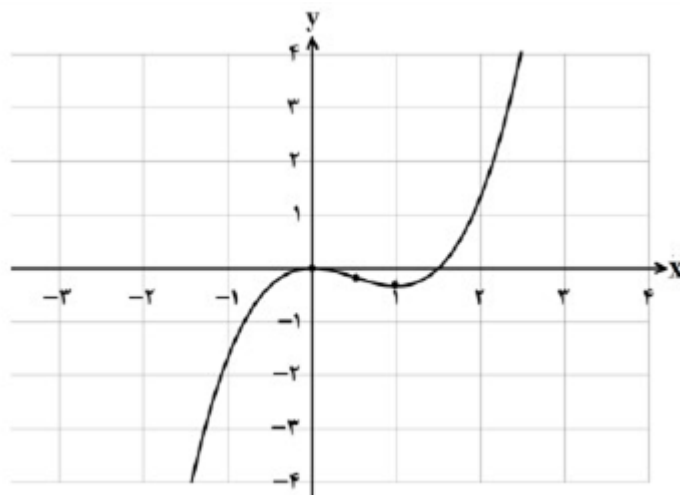
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$D_f = R$$

$$f'(x) = 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

پاسخ: ۱



x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f'	+	+	-	-	+
f''	-	-	+	+	+
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cup$
		max		min	

۵۱۸ ابتدا جهت تقعر تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ را در دامنه آن بررسی نمایید و سپس نقطه عطف آن را در صورت وجود، به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$$

پاسخ: ۱

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	-	+
f	$\cap$	$\cup$	$\cup$

نقطه عطف وجود ندارد.



۵۱۹ اکستریم‌های مطلق تابع $f(x) = x^5 - 5x$ را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ غیرقابل قبول}$$

پاسخ: ۱

$$f(1) = -4 \text{ مینیمم مطلق}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 22 \text{ ماکزیمم مطلق}$$

۵۲۰ پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن داریم به طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط این پنجره ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$2h + 2r + \pi r = 6 \Rightarrow h = \frac{6 - 2r - \pi r}{2}$$

پاسخ: ۱

$$S(r) = 6r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S'(r) = 6 - 4r - \pi r \Rightarrow 6 - 4r - \pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{6}{4 + \pi}$$

r	$\frac{6}{4 + \pi}$	
S'	+	-
S	↗	↘

$$h = \frac{6 - (2 + \pi) \frac{6}{4 + \pi}}{2} = \frac{6}{4 + \pi}$$

۵۲۱ بزرگترین بازه از R که تابع $f(x) = -2x^3 + 6x + 11$ در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = -6x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

پاسخ: ۱

x	-1		1	
f'	-	+	-	-
f	↘	↗	↘	↘

پس تابع در بازه $[-1, 1]$ صعودی اکید است.

۵۲۲ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- هر نقطه اکستریم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن تابع است.

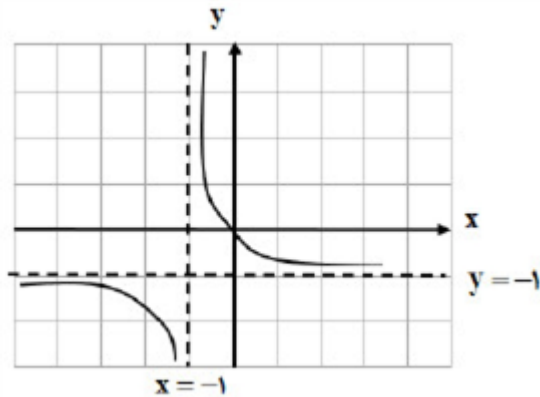
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست



جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{-x}{x+1}$ را رسم کنید. **۵۲۳**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲



مجانِب قائم $x = -1$
 مجانب افقی $y = -1$
 $y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$

پاسخ: ۱

x	$-\infty$	-1	$-\infty$
y'	-	-	
y	$-1 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -1$	

(ص ۱۴۴)

با رسم جدول تغییرات نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است. **۵۲۴**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$f'(x) = 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow 2x(x+1) = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ غیر قابل قبول $x = 0$.
 اکیدا صعودی $[0, +\infty)$, اکیدا نزولی $(-\infty, 0]$

پاسخ: ۱

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
f'	-	+	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

(ص ۱۲۶)

مقادیر a و b و c را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند. $f(0) = 1$ و $f(2) = -3$ و $f'(1) = 0$. **۵۲۵**

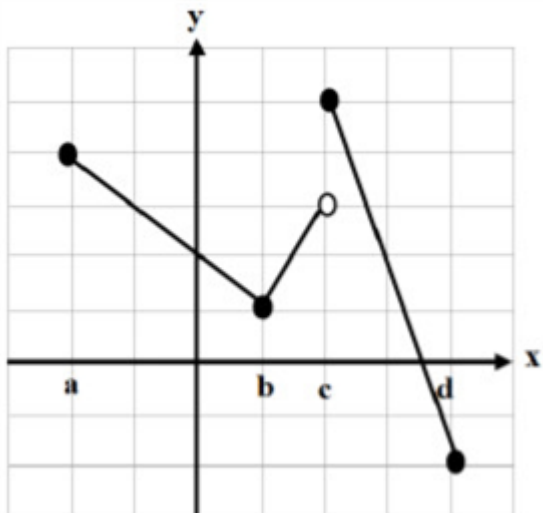
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$
 $f(2) = -3 \Rightarrow 8a + 4b + 1 = -3 \Rightarrow 8a + 4b = -4 \Rightarrow a + b = -1$
 $f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ (ص ۱۳۶)

پاسخ: ۱



در شکل زیر نمودار تابع f رسم شده است. طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و مطلق را مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ d مینیمم مطلق

c ماکزیمم مطلق

c ماکزیمم نسبی

b مینیمم نسبی

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

اگر $f'(c) = 0$ باشد، آنگاه $x = c$ یک نقطه اکسترمم نسبی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

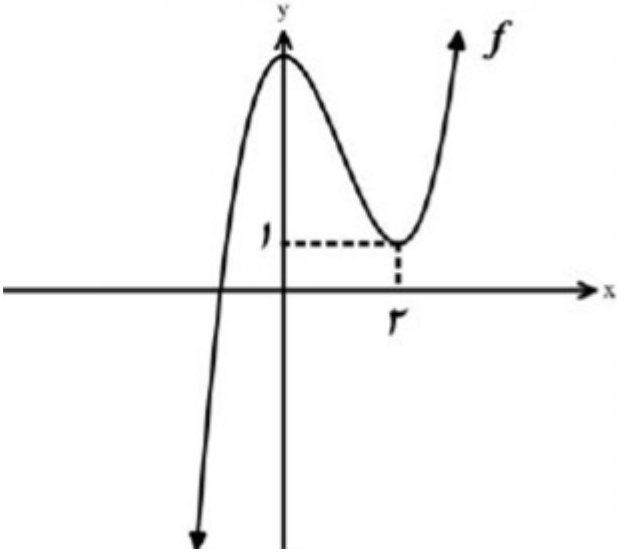
$$x - y = 10$$

$$p = xy = x(x - 10) = x^2 - 10x$$

$$p'(x) = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5, y = -5$$

پاسخ: ۱

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ به صورت شکل مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \Rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + (-12) + d = 1 \Rightarrow d = 5$$

پاسخ: ۱

۵۳۰ فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، محل تقاطع مجانب‌های آن، نقطه $(2, 1)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-1, 0)$ بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$cx + d = 0 \Rightarrow d = -2c$$

$$(-1, 0) \Rightarrow \frac{-a+b}{-c+d} = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{cx} = 1 \Rightarrow a = c$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

پاسخ: ۱



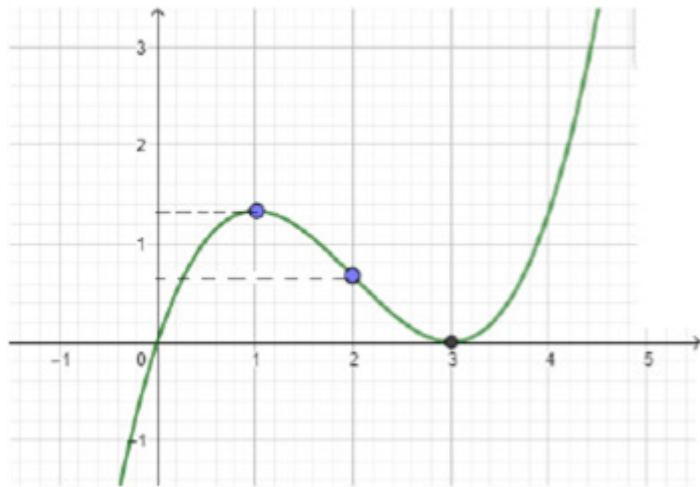
۵۳۱ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ را رسم کنید.

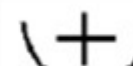
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f''(x) = 2x - 4$$

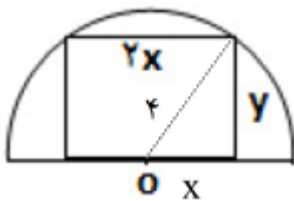
پاسخ: ۱



x	$-\infty$	۱	۲	۳	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	-	○	+
$f''(x)$			○			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{4}{3}$	$\searrow \frac{2}{3}$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		Max نسبی	نقطه عطف		Min نسبی	

۵۳۲ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱



$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow S(x) = 2x(\sqrt{16 - x^2})$$

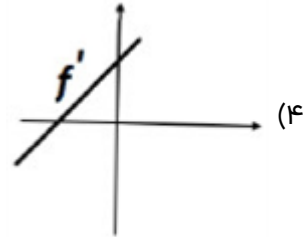
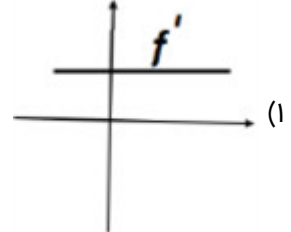
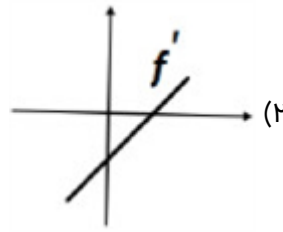
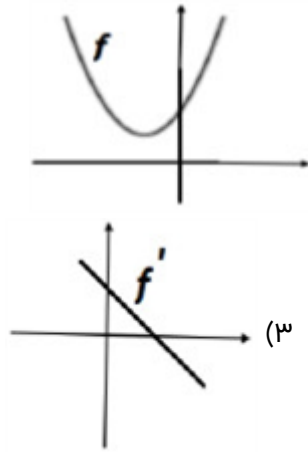
$$S'(x) = \frac{22 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{4}, y = \sqrt{4}$$

پاسخ: ۱

طول $2\sqrt{4}$ و عرض $\sqrt{4}$ است.



۵۳۳ با توجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.



سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیر ثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور x ها را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند.

x	$x_S < 0$	
f	نزولی	صعودی
f'	-	+

۵۳۴ نشان دهید در بین مستطیل‌هایی با محیط ۱۶ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$y = 8 - x \Rightarrow S(x) = -x^2 + 8x \Rightarrow S'(x) = -2x + 8 = 0$$

$$x = 4, y = 4$$

پاسخ: ۱

۵۳۵ با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید است؟

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} x = 2, x = -2$$

اکیداً صعودی $(2, +\infty), (-\infty, -2)$

پاسخ: ۱

x	-2	2
f'	+	-
f	↗	↘

۵۳۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر نقطه دلخواه از دامنه تابع ثابت، یک نقطه بحرانی است.

سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ درست



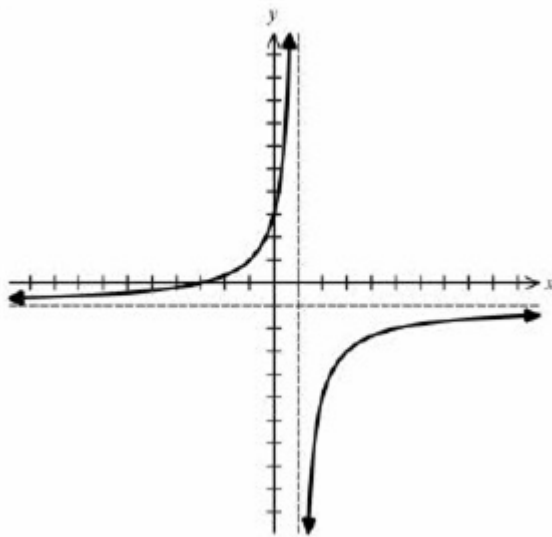
جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+3}{1-x}$ رسم کنید. ۵۳۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

مجاانب قائم $x = 1$ و مجانب افقی $y = -1$

نقطه بحرانی ندارد $f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2}$

پاسخ: ۱



X	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+		+
f	$-1 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \nearrow$

جهت تقعر و مختصات نقطه عطف تابع $f(x) = x(x^2 - 3) + 1$ را تعیین کنید. ۵۳۸

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

پاسخ: ۱

نقطه $(0, 1)$ نقطه عطف تابع است.

X	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-		+
f			

ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax - b$ طوری پیدا کنید که نقطه $(1, 2)$ اکسترمم نسبی تابع باشد. ۵۳۹

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$f(1) = 2 \Rightarrow a - b = 1$

$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + a \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3, b = -4$

پاسخ: ۱

جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. ۵۴۰

- اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ در این صورت $f(c)$ را یک تابع f می‌نامیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ ماکزیمم نسبی



۵۴۱) درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- اگر برای تابع f داشته باشید $f''(c) = 0$ آن گاه همواره نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ نادرست

۵۴۲) اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه‌ای $5x - y = 10$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصلضرب این دو عدد مینیمم گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$p = xy = 5x^2 - 10x \Rightarrow p'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = -5 \end{matrix}$$

پاسخ: ۱

۵۴۳) اکستریمم نسبی تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$ را در صورت وجود به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$$

پاسخ: ۱

x	-1	3
f'	+	-
f	$\nearrow$	$\searrow$
	max	min
	$\frac{7}{3}$	$-\frac{25}{3}$

۵۴۴) جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x-2}$ را رسم کنید.

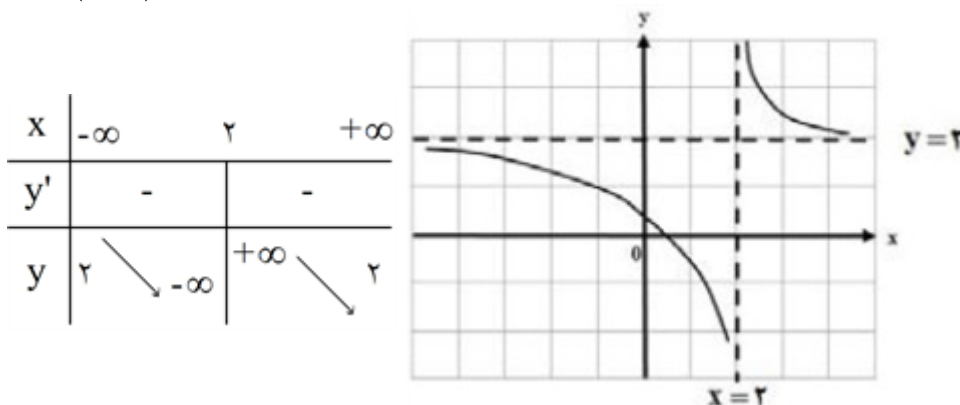
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

مجانِب قائم $x = 2$

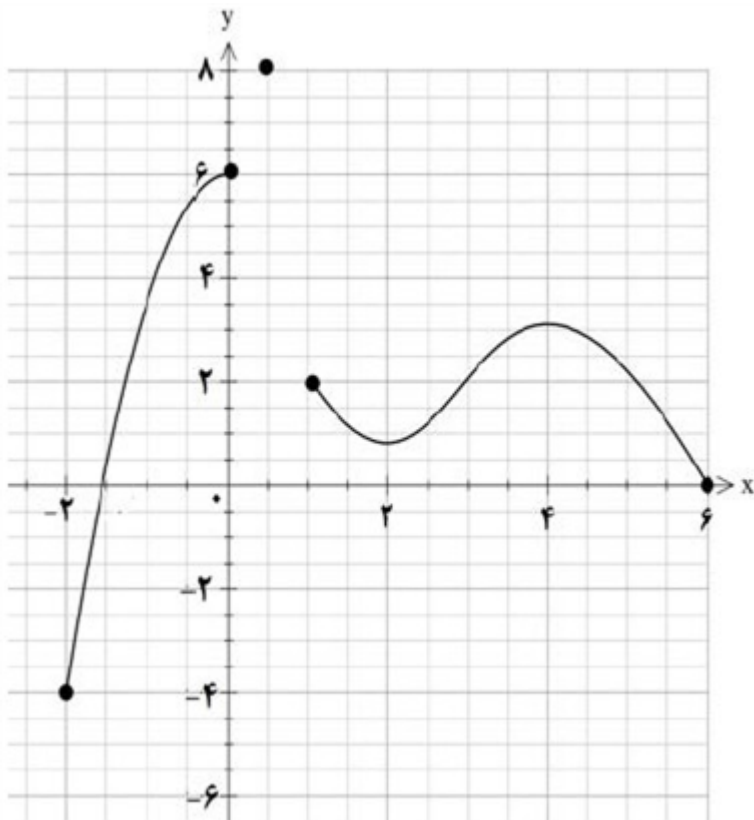
مجانِب افقی $y = 2$

$$y' = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$

پاسخ: ۱



۵۴۵ با توجه به نمودار داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



- الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید.
 ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید.
 پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید.
 ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ الف) ۸ ب) -۴ پ) ۴ ت) ۲

۵۴۶ اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ باشد. مقادیر a و b را به دست آورید.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b + 2 = 1 \Rightarrow -a + b = -1 \\ f'(-1) = 0 \Rightarrow -6a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-1}{2}, b = \frac{-3}{2}$$

پاسخ: ۱

۵۴۷ جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- اگر برای هر x در بازه I ، $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به دارد.

سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ بالا

۵۴۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- هر نقطه بحرانی تابع $f(x)$ ، یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.

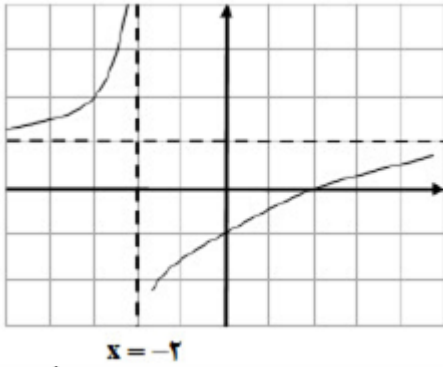
سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ نادرست



۵۴۹ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰



$y=1$ مجانب قائم $x = -2$
 مجانب افقی $y = 1$
 $y' = \frac{2}{(x+2)^2} > 0$

پاسخ: ۱

X	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	+		+
f	$1 \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow 1$	

۵۵۰ مقادیر اکسترمم مطلق تابع $g(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$

پاسخ: ۱

$g(-2) = -8 - 4 - 5 = -17 \min, g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \max$

۵۵۱ مقادیر a و b و c را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند. $f(0) = 1$ و $f(1) = 2$ و $x = \frac{1}{2}$ طول نقطه عطف نمودار تابع f باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$

$f(1) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$

پاسخ: ۱

۵۵۲ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه‌ی $[-1, 3]$ مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \notin [-1, 3] \end{cases}$

$f(-1) = 13$

$f(1) = -7 \Rightarrow \min(1, -7)$

$f(3) = 45 \Rightarrow \max(3, 45)$

پاسخ: ۱



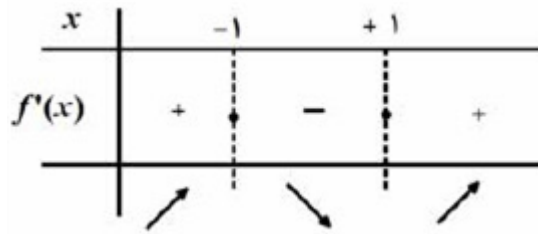
۵۵۳ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

اکیداً صعودی $(-\infty, -1), (1, +\infty)$

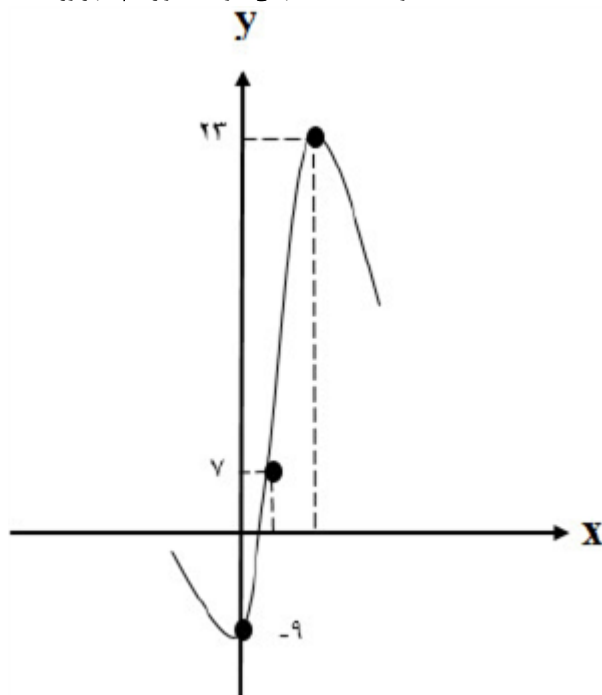
اکیداً نزولی $(-1, +1)$



پاسخ: ۱

۵۵۴ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰



X	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
f'	-	+	+	-	
f''	+	+	-	-	
f	$+\infty$	-9	23	$-\infty$	
	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	
		min		max	

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9, D_f = R$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$f''(x) = -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

پاسخ: ۱



۵۵۵ جهت تععر تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ را در دامنه‌اش بررسی کرده و نقطه عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$D_f = R$$

پاسخ: ۱

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
f''	+	-
	U	∩

$f'(1) = +\infty$ پس تابع در $x = 1$ مماس قائم دارد و $x = 1$ نقطه عطف است.

۵۵۶ ورق فلزی مستطیل شکلی، به طول ۱۶ سانتی‌متر و عرض ۶ سانتی‌متر در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه سر باز ساخته شود. مقدار x چه قدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$x \in [0, 3] \text{ عرض جعبه} = 6 - 2x, \quad x \in [0, 8] \text{ طول جعبه} = 16 - 2x$$

پاسخ: ۱

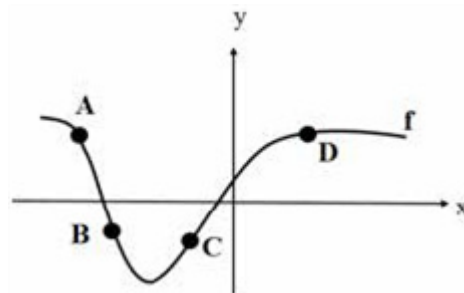
$$\Rightarrow v(x) = x(16 - 2x)(6 - 2x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x, \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$v'(x) = 12x^2 - 88x + 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \notin [0, 3] \\ x = \frac{4}{3} \in [0, 3] \end{cases}$$

چون $v(0) = v(3) = 0$ ، پس به ازای $x = \frac{4}{3}$ بیش‌ترین مقدار حجم حاصل می‌شود.

۵۵۷ جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- در نقطه از نمودار مقابل، مقادیر f' و f'' هر دو مثبت است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ C



۵۵۸ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را رسم کنید.

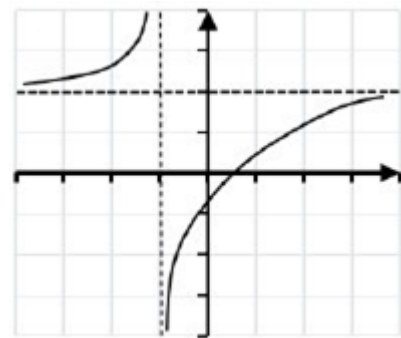
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

مجانِب قائم $x = -1$

مجانِب افقی $y = 2$

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	2	$+\infty$	2



۵۵۹ اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف منحنی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$f(-1) = 1 \Rightarrow a - b = 3, f'(-1) = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0 \Rightarrow a = 3, b = 0$$

۵۶۰ اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را در بازه $[-1, 1]$ تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(0) = 1 \quad \max \\ f(-1) = -3 \quad \min \end{cases}$$

۵۶۱ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱ پاسخ: درست

۵۶۲ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- اگر علامت f' بر بازه‌ای منفی باشد، آن‌گاه تابع f بر آن بازه اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱ پاسخ: درست



۵۶۳) درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ نادرست

۵۶۴) درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- اگر تابع f در هر نقطه اکسترمم نسبی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

۵۶۵) در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$2(x+y) = 14 \Rightarrow x+y = 7 \Rightarrow y = 7-x$$

پاسخ: ۱

$$y = 7-x \Rightarrow s = (y)(x) = 7x - x^2 \Rightarrow s'(x) = 7 - 2x = 0 \Rightarrow x = 7/2, y = 7/2$$

۵۶۶) اگر نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4b = 0 \Rightarrow b = -3$$

پاسخ: ۱

$$f(2) = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$$

$$-12 + d = -7 \Rightarrow d = 5$$

۵۶۷) در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ $[-1, 1]$

۵۶۸) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

۵۶۹) درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
اگر $x = c$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c) = 0$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ درست

۵۷۰) نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیش‌ترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$2(x+y) = 14 \Rightarrow x+y = 7 \Rightarrow y = 7-x$$

پاسخ: ۱

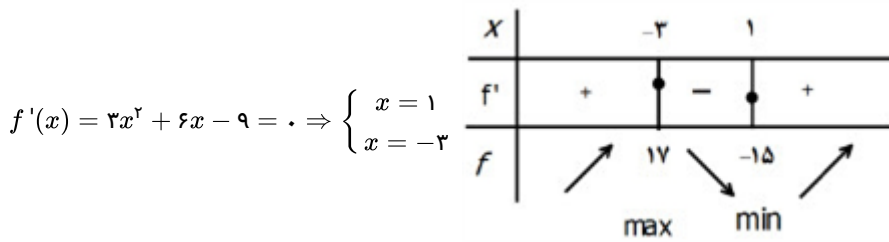
$$f = xy \Rightarrow f(x) = x(7-x) = -x^2 + 7x \Rightarrow f'(x) = -2x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}, y = \frac{7}{2}$$



۵۷۱ در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی آن‌را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹



پاسخ: ۱

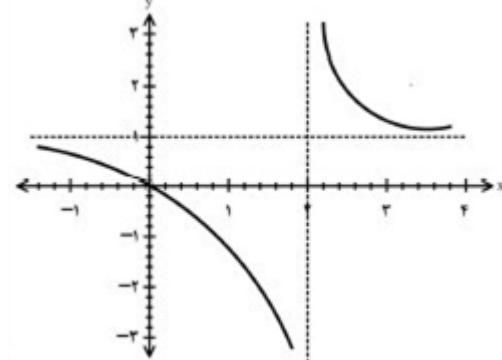
۵۷۲ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x-2}$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$x = 2$ مجانب قائم

$y = 1$ مجانب افقی

$$y' = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0$$



x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$f(x)$		-		-	
$f(x)$	1	0	$+\infty$	3	1

پاسخ: ۱

۵۷۳ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- در هر نقطه‌ای که جهت تقعر منحنی تابع عوض شود آن نقطه‌ی عطف تابع است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ نادرست

۵۷۴ مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ را در بازه $[-1, 2]$ تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$f(1) = -1 \quad f(-1) = 3 \quad f(2) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \max f(x) = 3 \\ \min f(x) = -1 \end{cases}$$

پاسخ: ۱



۵۷۵ اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای اکسترمم نسبی برابر ۳- باشد، مقادیر a و b را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$f'(x) = 2ax + b$$

پاسخ: ۱

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$f(1) = -3 \Rightarrow a + b = -3 \Rightarrow b = -6$$

۵۷۶ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۲۰ باشد و حاصل‌ضربشان کم‌ترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$a - b = 20 \Rightarrow a = b + 20$$

پاسخ: ۱

$$f(b) = b(b + 20) \Rightarrow f'(b) = 2b + 20 = 0$$

$$b = -10, a = +10$$

۵۷۷ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 7$ را در بازه‌ی $[-1, 3]$ ، در صورت وجود به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

$$f(-1) = 9$$

$$f(1) = 5 \Rightarrow \max(9, 25), \min(1, 5)$$

$$f(3) = 25$$



۵۷۸ جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ را رسم کنید.

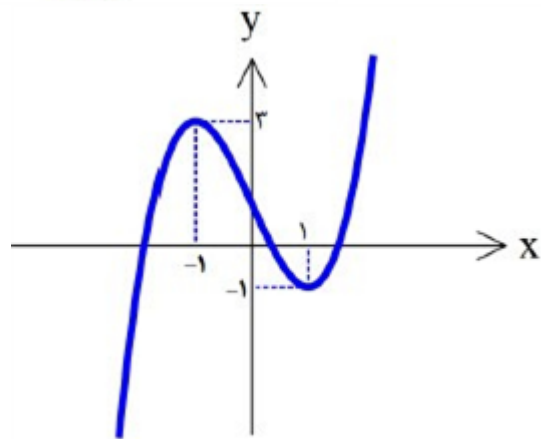
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$y' = 3x^2 - 3 \xrightarrow{y'=0} x = \pm 1$$

نقطه عطف $y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 1)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''		$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	$-\infty$	3	1	-1	$+\infty$	

max min



۵۷۹ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در بازه $(-1, 1)$ اکیداً صعودی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱ پاسخ: نادرست

۵۸۰ اگر نقطه $(-2, 5)$ ، نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx$$

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow 12 - 4b = 0 \Rightarrow b = 3$$

$$f(-2) = 5 \Rightarrow -8 + 4b + d = 5 \Rightarrow d = 1$$

۱ پاسخ:

۵۸۱ هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت 32 cm^2 خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه 2 cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتیمتر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$xy = 32 \Rightarrow f(x) = (y+2)(x+4) = \frac{128}{x} + 40 + 2x \Rightarrow f'(x) = -\frac{128}{x^2} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 8, y = 4$$

۱ پاسخ:

ابعاد صفحه: 12×6 است.



۵۸۲

تابع $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ در نظر بگیرید:

الف) با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.
ب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازه $[0, 3]$ در صورت وجود به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

x		-1		2	
f'	-	•	+	•	-
f		-16		11	
		min		max	

پاسخ: ۱ الف)

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

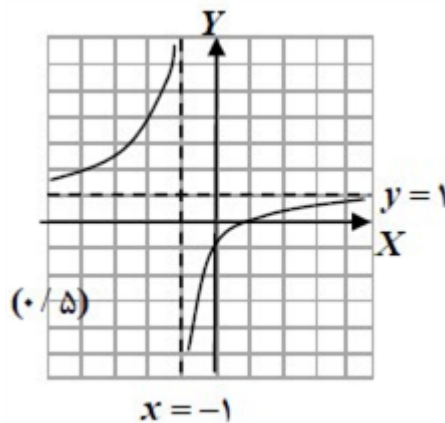
$$f(0) = -9 \text{ min}$$

$$f(2) = 11 \text{ max} \Rightarrow f(3) = 0$$

۵۸۳

جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹



پاسخ: ۱

$$\begin{aligned} x &= -1 \text{ قائم} \\ y &= 1 \text{ افقی} \\ y' &= \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	+		+
f	$1 \rightarrow -\infty$	$+\infty$	1

۵۸۴ جهت تقعر و نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 3) \text{ نقطه عطف}$$

پاسخ: ۱

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	-	0	+

تقعر رو به پایین $(-\infty, -1)$

تقعر رو به بالا $(-1, +\infty)$



جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. **۵۸۵**

نقطه‌ای از دامنه تابع که مشتق در آن وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است، نقطه نام دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ بحرانی (۰/۲۵)

در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید. **۵۸۶**

طول نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ ۲

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کم‌ترین مقدار ممکن گردد. **۵۸۷**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$f(x) = xy \Rightarrow f(x) = x(x+10) = x^2 + 10x \Rightarrow f'(x) = 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = -5, y = 5$$

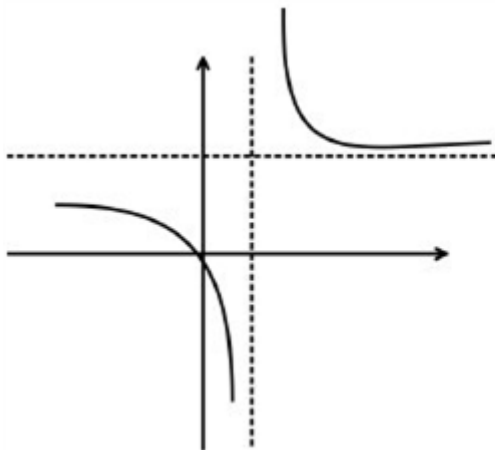
پاسخ: ۱

جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ را رسم کنید. **۵۸۸**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \quad \text{مجانb قائم } x=1, \text{مجانb افقی } y=2$$

پاسخ: ۱



x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f'	-		-
f	۲	$+\infty$	۲

اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه‌ی $[-1, 2]$ مشخص کنید. **۵۸۹**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \text{ قابل قبول نیست} \end{cases}$$

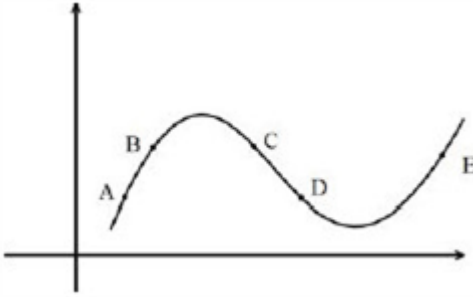
پاسخ: ۱

$$f(-1) = 13, f(2) = 4, f(1) = -7 \Rightarrow \min : (1, -7), \max : (-1, 13)$$



۵۹۰ شکل زیر را در نظر بگیرید. در کدام یک از پنج نقطه‌ی مشخص شده در نمودار:

الف) $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی‌اند.
ب) $f'(x)$ منفی و $f''(x)$ مثبت است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

ب) نقطه D

۱ پاسخ: الف) نقطه C

۵۹۱ دو عدد حقیقی a و b را طوری بیابید که داشته باشیم $2a + b = 60$ و حاصل ضرب آن‌ها بیش‌ترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$2a + b = 60 \Rightarrow b = 60 - 2a \Rightarrow ab = a(60 - 2a) = 60a - 2a^2$$

۱ پاسخ:

$$(ab)' = 60 - 4a = 0 \Rightarrow a = 15 \Rightarrow b = 60 - 2 \times 15 = 30$$

۵۹۲ اکستریم‌های مطلق تابع $g(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه‌ی $[-2, 1]$ در صورت وجود تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$g(x) = x^3 + 2x - 5 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$$

۱ پاسخ:

$$g(-2) = (-2)^3 + 2(-2) - 5 = -8 - 4 - 5 = -17 \text{ min}$$

$$g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \text{ max}$$

۵۹۳ جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 3x + 4$ را رسم کنید و نقاط اکستریم نسبی آن‌را در صورت وجود مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$f(x) = x^3 - 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

۱ پاسخ:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		۶	۲	

نقطه‌ی $(1, 2)$ مینیمم نسبی و نقطه‌ی $(-1, 6)$ ماکزیمم نسبی است.



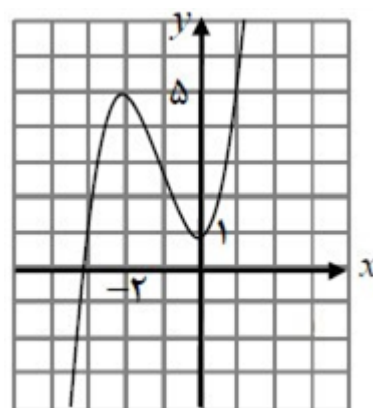
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$y' = 3x^2 + 6x \xrightarrow{y'=0} x = 0, x = -2$$

پاسخ: ۱

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
f'	+	0	-	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

ماکزیم مینیم



ابتدا جهت تقعر تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ را مشخص کرده، سپس وجود نقطه عطف آن را بررسی کنید. ۵۹۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}, y'' = \frac{4}{(x-1)^3}$$

پاسخ: ۱

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

در بازه $(1, +\infty)$ تقعر رو به بالا

در بازه $(-\infty, 1)$ تقعر رو به پایین

نقطه عطف ندارد.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-		+
f	$\cap$		$\cup$



۵۹۶ مقادیر اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$ را در بازه $[-2, 3]$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$f'(x) = x^2 + 2x \xrightarrow{f'=0} x = 0, x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{4}{3}, f(0) = 0 \text{ مینیمم مطلق}$$

پاسخ: ۱

$$f(3) = 18 \text{ ماکزیمم مطلق}$$

x	-2	0	3
f'	+	0	-
f	↗	↘	↗

$f(0) = 0$ نسبی مینیمم

۵۹۷ ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x بر می‌گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$V(x) = (1 - 2x)^2 \times x = x - 4x^2 + 4x^3$$

پاسخ: ۱

$$V'(x) = 1 - 8x + 12x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{1}{6} \text{ قابل قبول است. } 0.25$$

۵۹۸ اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 0 = 2a + b \Rightarrow b = -2a$$

پاسخ: ۱

$$f(1) = 7 \Rightarrow 7 = a + b \Rightarrow a = -7, b = 14$$



۵۹۹ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را رسم کنید.

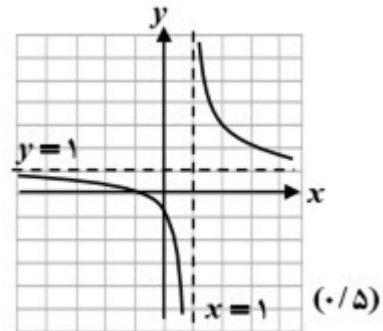
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$x = 1$ م. قائم (۰/۲۵)

$y = 1$ م.افقی (۰/۲۵)

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ: ۱



x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'	-	-	-	-	-
f	$1 \searrow$	$-1 \searrow$	$+\infty$	$3 \searrow$	$1 \searrow$

۶۰۰ مقادیر a و b را در تابع $f(x) = ax^2 + bx^2 - 1$ چنان بیابید که $A(1, 1)$ نقطه عطف منحنی باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 2ax + 2bx \Rightarrow f'' = 0 \Rightarrow 2a + 2b = 0 \quad (۰/۲۵) \\ f''(x) &= 2a + 2b \quad (۰/۲۵) \\ f(1) &= 1 \Rightarrow a + b - 1 = 1 \Rightarrow a + b = 2 \quad (۰/۲۵) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -1 \quad (۰/۲۵) \\ b &= 3 \quad (۰/۲۵) \end{aligned}$$

پاسخ: ۱

۶۰۱ تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \xrightarrow{f'(x)=0} x = 0$$

پاسخ: ۱

(۰/۲۵) نزولی $(-\infty, 0)$

(۰/۲۵) صعودی $(0, +\infty)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\searrow$	0	$\nearrow$



۶۰۲ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ را در بازه $[0, 2]$ تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 4}} \quad (0/25) \xrightarrow{f' = 0} x = 1, \quad \begin{array}{l} f(0) = f(2) = 2 \quad (0/25) \text{ مقدار ماکزیمم مطلق} \\ f(1) = \sqrt{3} \quad (0/25) \text{ مقدار مینیمم مطلق} \end{array} \quad (0/25)$$

