



دبیرخانه راهبری کشوری ریاضی
متوسطه دوم مستقر در شهر تهران

ریاضی دهم

مدیر: نرگس اصلانی



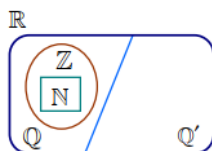
مبحث: مجموعه، الگو و دنباله

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه‌ی اعداد گنگ دقیقاً $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ است که آن را با $\mathbb{Q}'$ (گاهی: $\mathbb{Q}^c$) نشان می‌دهیم.

بعلاوه:

اعداد حقیقی مجموعه‌ی متشکل از تمام عددهای گویا و گنگ است: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$



زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$

مجموعه اعداد گویا، توسط عددهای صحیح ساخته می‌شود:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

بازه‌های بی‌کران:

این بازه‌ها از یک یا هر دو طرف تا بی‌نهایت ادامه دارند. مانند:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} = (a, +\infty)$$



سایر بازه‌های بی‌کران به صورت مشابه بیان می‌شوند: $(-\infty, a]$ و $(-\infty, a)$ و $[a, +\infty)$.

مورد خاص:

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

مجموعه تمام اعداد حقیقی

زیر مجموعه‌های مهم دیگری از $\mathbb{R}$ را ببینید:

بازه‌های اعداد:

بازه‌های کران‌دار:

ابتدا و انتهای این بازه‌ها با دو عدد مشخص می‌شود. مانند:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} = (a, b)$$

بازه‌ی باز



بازه‌های نیم باز $[a, b)$ و $(a, b]$ و بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ به صورت مشابه تعریف می‌شوند. مانند:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\} = [-1, 3)$$

متناهی یا نامتناهی:

یک مجموعه متناهی یا باپایان است، هرگاه:

تعداد عضوهای آن برابر عددی از مجموعه‌ی اعداد مسابی باشد.

مجموعه‌هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های متناهی می‌نامیم.

نمونه‌ها:

- مجموعه‌ی $\{101, 102, 103, \dots, 999\}$ متناهی، ولی مجموعه‌ی $\{2, 1, 0, -1, -2, \dots\}$ نامتناهی است.
- چون بین هر دو عدد، بی‌شمار عدد حقیقی وجود دارد؛ تمام بازه‌ها نامتناهی هستند.

کدام دو مجموعه‌ی زیر، هر دو نامتناهی با اشتراک متناهی هستند؟

- مجموعه‌ی عددهای گویا و مجموعه‌ی عددهای اول
- مجموعه‌ی انسان‌های کره زمین و مجموعه افراد ایرانی
- مجموعه‌ی عددهای اول و مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۵
- بازه‌ی بسته‌ی $0/7$ تا 1 و بازه‌ی اعداد $x < 0/85$

گزینه ۳

مرجع و متمم:

مجموعه‌ی «مرجع» یا مجموعه‌ی «جهانی» با نماد U مجموعه‌ای است که:

اعضای همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث ما در آن قرار دارند.

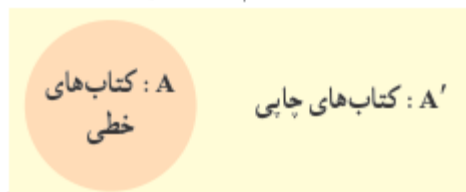
به عبارت دیگر، تمام مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ی U محسوب می‌شوند.

بعلاوه:

مجموعه‌ی تمام اعضای خارج A را با A' نشان داده و به آن «متمم» A گوئیم:

$$A' = U - A$$

U : مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه



نکته ۳

به چند نتیجه‌گیری توجه کنید:

- اگر A نامتناهی باشد، هر مجموعه شامل A هم نامتناهی است.
- اگر A متناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ی A هم متناهی خواهد بود.

نمونه:

بدیهی است که $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ نامتناهی است و در نتیجه:

تمام مجموعه‌های W, Z, Q و $\mathbb{R}$ نامتناهی هستند. بعلاوه: بدانید Q' نیز نامتناهی است.

به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوئیم.

نکته ۴

در مورد هر مجموعه‌ی A ، موارد زیر همیشه درست هستند:

$$A \cup A' = U \quad \text{و} \quad A \cap A' = \emptyset \quad \text{و} \quad (A')' = A$$

بعلاوه:

▪ همیشه $\emptyset' = U$ است، زیرا:

$$\emptyset' = U - \emptyset = U$$

▪ همیشه $U' = \emptyset$ است، زیرا:

$$U' = U - U = \emptyset$$

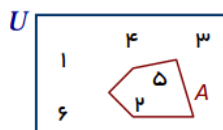
تعداد عضوها:

نمادهای $n(A)$ و $|A|$ هر دو تعداد عضوهای A را نشان می‌دهند.

رابطه‌ی ۱: چون A و A' خلاف (متمم) یکدیگر هستند، همواره:

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

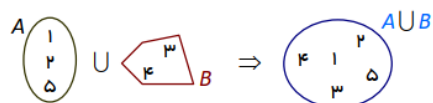
نمونه: در شکل مقابل می‌بینید:



$$n(A') = n(U) - n(A) = 6 - 2 = 4$$

رابطه‌ی ۲: اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم (یعنی: $A \cap B = \emptyset$) باشند، همواره:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 3 + 2 = 5$$

نکته ۵

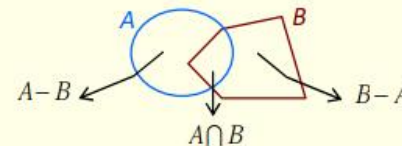
دو رابطه‌ی شمارشی بسیار مهم:

▪ اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

▪ در مورد تفاضل هم، رابطه‌ی مهم زیر برقرار است:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$



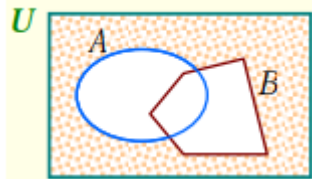
نکته ۶

وقتی A و B دو مجموعه هستند،

عضوهایی که در هیچ‌یک از آن دو قرار ندارند، دقیقاً متمم $A \cup B$ است.

بنابراین تعداد چنین عضوهایی برابر است با:

$$n(U) - n(A \cup B) = n(U) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)]$$



مدل: نرگس اصلانی

مبحث: مجموعه، الگو و دنباله

الگو و دنباله

۳

الگوی خطی و غیرخطی:

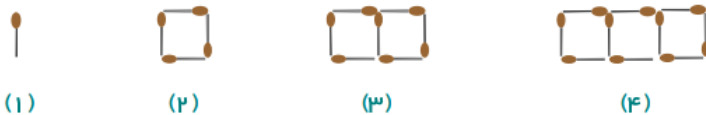
«الگوی خطی» به صورت $t_n = an + b$ یک عبارت درجه اول بر حسب n است. مانند:

$$1, 4, 7, 10, \dots, 3n-2, \dots \Rightarrow t_n = 3n-2$$

سایر الگوها غیرخطی هستند، نظیر:

$$2, 5, 10, 17, \dots, n^2+1, \dots \Rightarrow t_n = n^2+1$$

تعداد چوب کبریت‌ها در شکل‌های دهم و n ام را مشخص می‌کنیم.



(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

دنباله:

در یک دنباله a_n ، اولین جمله a_1 ، دومین جمله a_2 و ... بوده و نمایش آن چنین است:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

a_n «جمله‌ی عمومی» یا «جمله‌ی n ام» است.

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.



توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و به همین ترتیب جمله n ام یا جمله عمومی آن را با t_n نمایش می‌دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می‌شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله‌ای درجه دوم است.

دنباله‌هایی با جمله عمومی درجه دوم جز اهداف کتاب نیست.

توجه کنید:

دنباله‌ای که برای تعیین هر جمله به جملات قبلی نیاز است، «دنباله‌ی بازگشتی» گفته می‌شود.

مثال: پنج جمله‌ی اول از دنباله‌ی زیر را تعیین کنید:

$$t_1 = -1, t_n = -2t_{n-1} + 1 \quad (n \geq 2)$$



پاسخ

قرار می‌دهیم $n = 2$ و از فرض $t_1 = -1$ استفاده می‌کنیم:

$$t_2 = -2t_1 + 1 = -2(-1) + 1 = 3$$

به صورت مشابه:

$$n = 3: t_3 = -2t_2 + 1 = -2(3) + 1 = -5$$

$$n = 4: t_4 = -2t_3 + 1 = -2(-5) + 1 = 11$$

$$n = 5: t_5 = -2t_4 + 1 = -2(11) + 1 = -21$$

در دنباله‌ی $a_n = \frac{22-3n}{3+n}$ چند جمله‌ی مثبت وجود دارد؟

$$\frac{22-3n}{3+n} > 0$$

چون مخرج همواره مثبت است، کافی است صورت کسر هم مثبت باشد:

$$22-3n > 0 \rightarrow -3n > -22 \rightarrow n < \frac{22}{3} \equiv 7/3$$

پس؛ جواب عددهای ۱، ۲، ...، ۷ است.

نکته ۸

اگر جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی را با a و قدرنسبت را با d نشان دهیم، شکل کلی چنین است:

$$\underbrace{a}_{a_1}, \underbrace{a+d}_{a_2}, \underbrace{a+2d}_{a_3}, \underbrace{a+3d}_{a_4}, \dots$$

جمله‌ی دهم به صورت $a+9d$ خواهد بود و در کل:

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی به صورت $a_n = a + (n-1)d$ است.

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

توجه کنید:

- دنباله‌ی حسابی همان دنباله‌ی خطی است. بعلاوه، در دنباله‌ی خطی، ضریب n همان قدرنسبت است. نمونه:

در دنباله‌ی خطی $a_n = -3n + 2$ داریم: $d = -3$.

- در این دنباله، قدر نسبت برابر است با «تفاضل» هر دو جمله‌ی متوالی:

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots$$

روش کوتاه:

وقتی جملات اول و آخر و قدرنسبت معلوم هستند، تعداد جملات از رابطه‌ی $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ حاصل می‌شود.

برای نمونه، در حل تست قبل، به جای خط دوم به بعد:

$$n = \frac{399 - (-1)}{4} + 1 = \frac{400}{4} + 1 = 101$$

نکته ۱۰

هرگاه سه عدد a, b, c سه جمله‌ی متوالی (پشت سر هم) از یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه:

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \text{یا} \quad 2b = a+c$$

عدد b را «واسطه حسابی» یا «میانگین حسابی» بین a و c گویند.

نکته ۹

اگر دو جمله‌ی دلخواه a_m و a_n از یک دنباله عددی معلوم باشند، آنگاه:

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

نکته ۱۲

اگر a جمله‌ی اول و r قدرنسبت دنباله‌ی هندسی باشد، دنباله چنین است:

$$a, \underbrace{a \times r}_{a_2}, \underbrace{a \times r^2}_{a_3}, \underbrace{a \times r^3}_{a_4}, \dots$$

بنابراین:

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی به صورت $a_n = a \times r^{n-1}$ است.

جمله‌ی n ام دنباله‌ی هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می‌باشد ($t_1, r \neq 0$).

دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. جمله اول هم باید غیرصفر باشد.

دنباله هندسی:

در این نوع دنباله، نسبت هر دو جمله متوالی یک مقدار ثابت است. به این نسبت «قدرنسبت» گفته و آن را با r نشان می‌دهیم:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = r \quad \text{قدرنسبت:}$$

برای نمونه:

اگر جملات دوم و هشتم دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۸ و ۲ باشند:

$$r^{8-2} = \frac{a_8}{a_2} = \frac{2}{8} \rightarrow r^6 = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \pm \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{6}} = \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow r = \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \pm \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

نکته ۱۳

اگر دو جمله دلخواه a_m و a_n از یک دنباله‌ی هندسی معلوم باشند، آنگاه:

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید.

دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

نادرست، مثال نقض:

$$3, 3, 3, \dots \rightarrow \begin{cases} \text{حسابی: } a_1 = 3, d = 0 \\ \text{هندسی: } a_1 = 3, q = 1 \end{cases}$$

فصل ۲: مثلثات

مبحث: مثلثات

مدیر: نرگس اصلانی

نکته ۱

معرفی چهار نسبت مثلثاتی برای هر زاویه ی تند:

برای زاویه ی $\hat{B}$ در مثلث قائم الزاویه:

○ سینوس و کسینوس:

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \quad \text{و} \quad \cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

○ تانژانت و کتانژانت:

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \quad \text{و} \quad \cot \hat{B} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

توجه کنید:

چند مطلب در مورد زوایا و نقاط متناظر روی دایره ی مثلثاتی:

- هر نقطه روی این دایره زوایای مختلفی را نشان می دهد. (نقطه ی B هم زاویه ی $+90^\circ$ و هم زاویه ی -270° را نشان می دهد. نقطه ی C هم هر دوی زوایای $+180^\circ$ و -180° را نشان می دهد).

دایره مثلثاتی

نمایش زوایا در یک دایره ی استاندارد:

نکته ۵

دایره ی مثلثاتی:

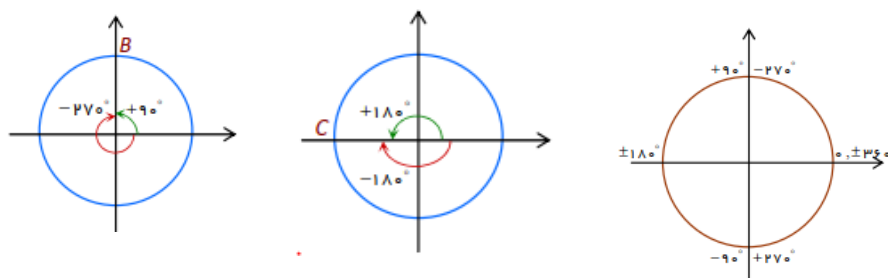
این دایره با دو ویژگی معرفی می شود:

- مرکز آن در مبدأ مختصات قرار دارد.
- شعاع این دایره ۱ واحد است.

نمایش استاندارد زوایا در این دایره:

الف) ابتدا نیم خط Ox را به عنوان یک ضلع زاویه در نظر بگیرید.

ب) سپس: اگر زاویه مثبت باشد، در خلاف حرکت عقربه های ساعت و اگر زاویه منفی باشد، در جهت عقربه های ساعت به اندازه ی آن حرکت کنید. (جهت های مثبت و منفی در شکل مشخص شده)



نمایش زوایای مهمی روی دایره را می بینید:

نواحی چهارگانه:

می‌دانیم محورهای مختصات صفحه را به نواحی اول تا چهارم تقسیم می‌کنند. در بحث مثلثات، این چهار ناحیه را بر حسب زوایای روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

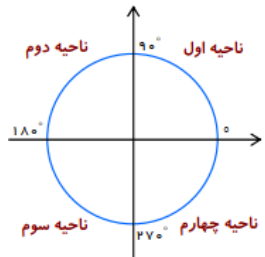
- **نامیه‌ی اول:** این ناحیه را می‌توان بین 0° تا 90° در نظر گرفت.

در ربع اول است $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
 در ربع دوم است $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
 در ربع سوم است $180^\circ < \alpha < 270^\circ$
 در ربع چهارم است $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

به‌طور مشابه:

- **نامیه‌ی دوم:** زوایای بین 90° تا 180° .
- **نامیه‌ی سوم:** زوایای بین 180° تا 270° و
- **نامیه‌ی چهارم:** زوایای بین 270° تا 360° .

(البته زوایای بزرگ‌تر از 360° نیز در یکی از چهار ناحیه قرار می‌گیرند).



نکته ۶

در مورد هر زاویه‌ی α و نقطه‌ی متناظر P :

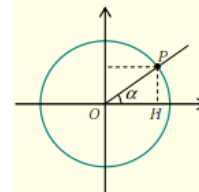
چون OH و PH به ترتیب طول و عرض نقطه‌ی P هستند، بنابراین:

$$\sin \alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{y_P}{1} \Rightarrow \sin \alpha = y_P$$

$$\cos \alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{x_P}{1} \Rightarrow \cos \alpha = x_P$$

بعلاوه: طبق تعاریف تانژانت و کتانژانت:

$$\tan \alpha = \frac{PH}{OH} = \frac{y_P}{x_P} \quad \text{و} \quad \cot \alpha = \frac{OH}{PH} = \frac{x_P}{y_P}$$



نکته ۷

با توجه به نکته‌ی قبل:

چون شعاع دایره‌ی مثلثاتی برابر ۱ است، همواره $-1 \leq x_P \leq 1$ و $-1 \leq y_P \leq 1$ بوده و برای هر زاویه‌ی α :

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad \text{و} \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

اما توجه باشید که:

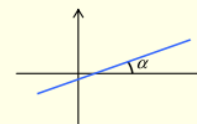
مقادیر $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ هر عدد حقیقی از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌توانند بدست آیند.

نکته ۳

شیب هر خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور طول‌ها تشکیل می‌دهد. یعنی:

$$m = \tan \alpha$$

عدد m شیب خط است.



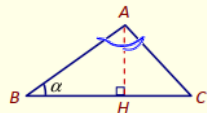
نکته ۴

در هر مثلث، مساحت برابر است با:

نصف حاصل‌ضرب هر دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو.

به عبارت دیگر: در شکل داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \alpha$$



زوایای معروف:

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ و 360° همواره مورد نیاز هستند:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ت.ن	0	ت.ن	0
$\cot \alpha$	ت.ن	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	ت.ن	0	ت.ن

نکته ۸

هر نسبت مثلثاتی دقیقاً در دو ناحیه مثبت است:

« $\sin \alpha$ در نواحی اول و دوم، $\cos \alpha$ در نواحی اول و چهارم و $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ در نواحی اول و سوم مثبت و در دو ناحیه دیگر منفی هستند.»

توجه کنید:

تانژانت برای زوایای $90^\circ, \pm 270^\circ$ و کتانژانت برای زوایای $0^\circ, 180^\circ, \pm 360^\circ$... تعریف نشده است.

نکته ۱۰

لیست رابطه‌های مقدماتی بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه‌ی دلخواه α :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1) \text{ در نتیجه:}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad \text{و} \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\sin \theta \times \sin \theta = (\sin \theta)^2 = \sin^2 \theta$$

۳ (روابط بین نسبت‌ها)

تذکر: در رابطه‌هایی که به دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویه α با توجه به ناحیه‌ای که

α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \quad \text{و به عبارت دیگر: } \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{و} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (2)$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

$$(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) \stackrel{\text{انحاد مزدوج}}{=} 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

فصل ۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

مدرس: نرگس اصلانی

مبمٹ: توان‌های گویا



ریشه‌ی nام:

فرض کنید n عددی طبیعی و a عددی حقیقی باشد. اگر برای یک عدد b داشته باشیم:

$$b^n = a$$

آنگاه b را یک ریشه‌ی n ام عدد a گویند.

عدد 64 را در نظر بگیرید:

چون $8^2 = 64$ و $(-8)^2 = 64$ ، عدد 64 دو ریشه‌ی دوم 8 و -8 را دارد. از سوی دیگر، تنها عددی که توان

سوم آن برابر 64 باشد، عدد 4 است؛ $4^3 = 64$ ؛ پس 64 فقط یک ریشه‌ی سوم دارد.

عدد -64 را در نظر بگیرید

چون این عدد منفی است، توان دوم هیچ عددی با آن برابر نیست و لذا -64 ریشه‌ی دوم ندارد. با این حال، واضح است که $(-4)^3 = -64$ و بنابراین تنها ریشه‌ی سوم آن -4 است.

وقتی می‌نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می‌کنیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

نکته ۱

وقتی $a = b^2$ باشد، عدد b را یک «ریشه‌ی دوم» عدد a می‌نامند. برای نمونه، چون:

$$7^2 = 49 \quad \text{و} \quad (-7)^2 = 49$$

بنابراین: عددهای 7 و -7 هر دو ریشه‌ی دوم عدد 49 هستند.

توجه کنید:

هر عدد مثبت a (مانند 49) همیشه دو ریشه‌ی دوم دارد که قرینه‌ی یکدیگر هستند.

بویژه:

ریشه‌ی مثبت را با $\sqrt[n]{a}$ و یا $\sqrt{a}$ نشان می‌دهند؛ بنابراین: $\sqrt{49} = 7$ و $\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$

(عددهای منفی ریشه‌ی دوم ندارند و عدد صفر فقط یک ریشه‌ی دوم دارد: $\sqrt{0} = 0$)

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & a, b \geq 0 \text{ و } n \text{ زوج} \\ \sqrt[n]{ab} & a, b \text{ دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد} \end{cases}$$

نکته ۳

اگر عددی به توان سه برسد و برابر a شود، به آن ریشه‌ی سوم a گویند. برای نمونه:

- عدد ۴ یک ریشه‌ی سوم ۶۴ است، زیرا: $4^3 = 64$.
- عدد ۳- یک ریشه‌ی سوم ۲۷- است، زیرا: $(-3)^3 = -27$.

توجه کنید:

هر عدد منفی یا مثبت مانند a ، فقط یک ریشه‌ی سوم دارد

این ریشه را به صورت $\sqrt[3]{a}$ نشان می‌دهیم و بنابراین:

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{27} = 3$$

بعلاوه:

در رادیکال با فرجه‌ی ۳، علامت منفی را می‌توان از زیر رادیکال خارج کرد:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$$

نکته ۲

تفاوت دو عبارت $\sqrt{a^2}$ و $(\sqrt{a})^2$:

- در عبارت $(\sqrt{a})^2$ مقدار a نمی‌تواند منفی باشد و رادیکال و توان ۲ با هم حذف می‌شوند؛ یعنی: $(\sqrt{a})^2 = a$ نمونه:

$$(\sqrt{5})^2 = 5 \quad \text{و} \quad (\sqrt{11/2})^2 = 11/2$$

- در عبارت $\sqrt{a^2}$ مقدار a هر عدد مثبت یا منفی می‌تواند باشد. البته توجه کنید:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

نمونه‌ها:

$$\sqrt{5^2} = |5| = 5 \quad \text{و} \quad \sqrt{(-11/2)^2} = |-11/2| = 11/2$$

نکته ۴

اگر n فرد باشد، هر عددی دقیقاً یک ریشه‌ی n اُم دارد که آن را با استفاده از $\sqrt[n]{}$ نشان می‌دهیم:

$$b^n = a \Rightarrow b = \sqrt[n]{a}$$

برای نمونه:

$$(-3)^5 = -243 \Rightarrow \sqrt[5]{-243} = -3$$

به دو مورد دیگر هم برای n فرد توجه کنید:

■ عبارت‌های $\sqrt[n]{a^n}$ و $(\sqrt[n]{a})^n$ تفاوتی ندارند و:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

■ علامت منفی از رادیکال خارج می‌شود:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

نکته ۵

اگر n زوج باشد:

- عددهای منفی ریشه‌ی n اُم ندارند.
- هر عدد مثبت دارای دو ریشه‌ی n اُم است که همیشه قرینه‌ی یکدیگر هستند، برای نمونه:

$$b^4 = 16 \Rightarrow b = \pm 2$$

بعلاوه: ریشه‌ی مثبت را توسط $\sqrt[n]{}$ نشان می‌دهیم:

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

توجه کنید:

که برای n های زوج (مانند فرجه‌ی دو)، عبارت‌های $\sqrt[n]{a^n}$ و $(\sqrt[n]{a})^n$ یکسان نیستند و:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{a^n} = |a|$$



ضرب و تقسیم رادیکال‌ها به سادگی انجام می‌شوند:

نکته ۶

کافی است فرجه‌ها یکسان باشند:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

برای نمونه:

$$(4\sqrt[3]{5}) \times (-3\sqrt[3]{2}) = -12\sqrt[3]{10}$$

نکته ۷

ساده کردن رادیکال:

در عبارت $\sqrt[n]{a^m}$ وقتی m بر n بخش‌پذیر باشد:

■ اگر فرجه فرد باشد، کافی است m بر n تقسیم شود. نمونه:

$$\sqrt[5]{a^{10}} = a^{10 \div 5} = a^2$$

■ اگر فرجه زوج باشد، m بر n تقسیم می‌شود، ولی باید قدرمطلق بکار ببریم. نمونه:

$$\sqrt[4]{a^{12}} = |a|^{12 \div 4} = |a|^3 \quad \text{و} \quad \sqrt[4]{a^6} = \sqrt{|a|^3}$$

البته اگر بدانیم a مثبت است، فقط کافی است توان بر فرجه تقسیم شود:

$$\sqrt{a^{10}} = a^{10 \div 2} = a^5$$

نکته ۹

رادیکال‌های تو در تو:

هنگامی که یک رادیکال داخل رادیکال دیگری قرار دارد، فرجه‌ها در هم ضرب می‌شوند:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$$

نکته ۸

جمع و تفریق:

فقط رادیکال‌های متشابه را می‌توان جمع یا تفریق کرد. یعنی:

فرجه و عددهای زیر رادیکال یکسان باشند.

مانند $5\sqrt[3]{6}$ و $3\sqrt[3]{6}$ و می‌نویسیم:

$$-5\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{6} = -2\sqrt[3]{6}$$

معمولاً ابتدا لازم است رادیکال‌ها ساده شوند تا متشابه بودن آن‌ها معلوم گردد.

مقایسه‌ی توان‌های یک عدد را ببینید:

نکته ۱۰

اگر $a > 1$ باشد:

$$a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots$$

اگر $0 < a < 1$ باشد:

$$a > a^2 > a^3 > a^4 > \dots$$

نکته ۱۱

اگر $a > 1$ باشد، هر قدر فرجه بزرگ‌تر شود، حاصل کوچک می‌شود:

$$a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots$$

اگر $0 < a < 1$ باشد، نامساوی‌ها برعکس می‌شود:

$$a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots < 1$$

نکته ۱۳

برای هر عدد مثبت a داریم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

نمونه‌ها:

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{و} \quad 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

بنابراین:

برای عددهای منفی توان $\frac{1}{n}$ تعریف نمی‌شود و در نتیجه $(-64)^{\frac{1}{3}}$ تعریف نشده است: برقرار است.

ولی تساوی $\sqrt[3]{-64} = -4$ برقرار است.

توان‌های گویا

۳



فقط عددهای مثبت را می‌توان به توان عددهای گویا هم رساند:

توجه کنید:

برای دو عدد مثبت a و b ، قوانین توان‌ها همیشه درست است:

$$a^r \times a^s = a^{r+s} \quad \text{و} \quad a^r \times b^r = (a \times b)^r \quad \text{و} \quad (a^r)^s = a^{r \times s}$$

مثال: عدد $\sqrt{\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{3}}$ را با توان گویا بنویسید.

پاسخ ☒

کافی است طبق قواعد بالا، همه رادیکال‌ها را توان دار بنویسیم؛

$$\sqrt{\mu^{\frac{1}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}} = (\mu \times \mu^{\frac{1}{3}} \times \mu^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} = (\mu^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} = (\mu^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = \mu^{\frac{5}{9}}$$

نکته ۱۴

اگر a عددی مثبت و m و n طبیعی باشند:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

عبارت‌های جبری

اتحاد مکعب دو جمله‌ای:

این اتحاد نیز مانند مربع دوجمله‌ای، دو شکل دارد:

■ مکعب مجموع دو جمله:

$$(a+b)^w = a^w + w a^{w-1} b + \frac{w(w-1)}{2} a^{w-2} b^2 + \dots + b^w$$

■ مکعب تفاضل دو جمله:

$$(a-b)^w = a^w - w a^{w-1} b + w a b^{w-1} - b^w$$

مربع دو جمله‌ای:

$$(a+b)^p = a^p + pab + b^p \quad , \quad (a-b)^p = a^p - pab + b^p$$

اتحاد مزدوج:

$$(a+b)(a-b) = a^p - b^p$$

اتحاد جملہ مشترک:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} 8x^3 - 27 &= (2x)^3 - 3^3 \\ &= (2x - 3)[(2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2] \\ &= (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) \end{aligned}$$

$$x^3 + 1 =$$

$$x^3 - 8 =$$

نکته ۱۶

اتحادهای چاق و لاغر:

مجموع مکعبات:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

تفاضل مکعبات:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

تجزیه ی چندجمله‌ای

۴



فاکتورگیری!

تجزیه با اتحاد:

$$64x^3 - 8 = (4x)^3 - 2^3 = (4x - 2)(16x^2 + 8x + 4)$$

نکته ۱۷

منظور از تجزیه ی چندجمله‌ای:

تبدیل آن به صورت ضرب چندین چندجمله‌ای با درجات کمتر.

برای نمونه، در اتحاد:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

عبارت سمت چپ تجزیه ی عبارت سمت راست است.

مثال ۲

عبارت $a^3 - 2ab + a^2b - 2b^2$ را تجزیه کنید :

$$\begin{aligned} a^3 - 2ab + a^2b - 2b^2 &= a^2(a+b) - 2b(a+b) \\ &= (a+b)(a^2 - 2b) \end{aligned}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

هر یک از عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ یک عامل $a^2 - b^2$ است. همچنین $a^2 - b^2$ هم مضرب $a-b$ و هم مضرب $a+b$ است.

آیا $a+b$ مضرب دیگری دارد؟

۱) مضرب‌های هر عبارت جبری از ضرب آن در عبارت‌های جبری دیگر به دست می‌آیند :
..... و $(a+b)(a-b)$ و $-(a+b)$ و $(a+b)(a+b)^2$ و $2(a+b)$ و $a+b$: بعضی از

نکته : یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد. (مقدار ندارد)

گویا کردن مخرج:

اگر در مخرج یک کسر، عبارت رادیکالی هم موجود باشد، تبدیل آن به کسری برابر که در مخرج رادیکال نداشته باشیم، «گویا کردن مخرج» گفته می‌شود.

برای گویا کردن مخرج کسرها، در کل سه حالت وجود دارد:

نکته ۱۸

حالت اول:

اگر مخرج کسر مانند $\frac{1}{\sqrt{x}}$ یا $\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ دارای یک جمله باشد، کافی است صورت و مخرج را در یک رادیکال مناسب ضرب کرد تا رادیکال مخرج حذف شود.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\sqrt{2}} : \quad \frac{3}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} &= \frac{3 \times \sqrt{2}}{2 \times (\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{5\sqrt[3]{2}} : \quad \frac{1}{5\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} &= \frac{1 \times \sqrt[3]{2^2}}{5 \times \sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{5 \times 2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{10} \end{aligned}$$

نکته ۱۹

حالت دوم:

اگر مخرج کسر مانند $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ دارای دو جمله باشد، کافی است اتحاد مزدوج بکار رود. نمونه:

$$\frac{-2}{5\sqrt{3}-4} \rightarrow \frac{-2}{5\sqrt{3}-4} \times \frac{5\sqrt{3}+4}{5\sqrt{3}+4} = \frac{-2(5\sqrt{3})-2(4)}{(5\sqrt{3})^2-(4)^2} = \frac{-10\sqrt{3}-8}{25 \times 3 - 16} \\ = \frac{-10\sqrt{3}-8}{75-16} = \frac{-10\sqrt{3}-8}{59}$$

نکته ۲۰

حالت سوم:

اگر عبارت داده شده مشابه مورد قبل ولی با فرجه‌ی سه باشد، باید اتحاد چاق و لاغر را بکار ببریم:

$$\frac{-2}{\sqrt[3]{\mu}-3} : \frac{-2}{\sqrt[3]{\mu}-3} \times \frac{\sqrt[3]{\mu^2}+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\mu}+9}{\sqrt[3]{\mu^2}+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\mu}+9} = \frac{-2(\sqrt[3]{\mu^2}+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\mu}+9)}{(\sqrt[3]{\mu})^3-(3)^3} = \frac{-2(\sqrt[3]{\mu^2}+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\mu}+9)}{\mu-27} \\ = \frac{-2(\sqrt[3]{\mu^2}+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\mu}+9)}{-25} = \frac{2(\sqrt[3]{\mu^2}+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\mu}+9)}{25}$$

فصل ۴: معادله‌ها و نامعادله‌ها

مبحث: معادلات و نامعادلات

مدیر: نرگس اصلانی

معادله‌ی درجه اول

نکته ۱

معادله‌ی درجه اول:

معادله‌ای است که پس از ساده شدن به صورت $ax=b$ نوشته شود. در این معادله:

- عدد a را «ضریب مجهول» و عدد b را «طرف معلوم» گویند.
- اگر $a \neq 0$ باشد، با تقسیم طرفین معادله بر آن، تنها جواب معادله $x = \frac{b}{a}$ بدست خواهد آمد:

$$x = \frac{\text{طرف معلوم}}{\text{ضریب مجهول}}$$

نکته ۲

$$ab=0 \Rightarrow a=0 \text{ یا } b=0$$

یعنی:

اگر معادله به صورت $ab=0$ باشد، هم جواب‌های $a=0$ و هم جواب‌های $b=0$ قابل قبول هستند.

نکته ۳

$$\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ و } b \neq 0$$

یعنی:

اگر معادله به صورت کسری $\frac{a}{b} = 0$ نوشته شود:

- صورت را برابر صفر قرار داده و جواب‌ها را مشخص می‌کنیم.
- جواب‌های بدست آمده فقط به شرطی که مخرج را صفر نکنند، قابل قبول هستند.

معادله درجه دوم

در این بخش به بررسی معادله‌ی درجه‌ی دوم و روش‌های حل آن می‌پردازیم:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0)$$

چندین روش برای حل معادلات درجه دوم:

نکته ۴

$$x^2 = a$$

حالت‌های حل معادله‌ای به صورت روبرو:

- اگر a عددی منفی باشد، چون x^2 هیچ‌گاه منفی نمی‌شود، معادله جواب ندارد.

برای نمونه، معادله‌ی $2x^2 + 4 = 0$ هیچ جوابی ندارد:

$$2x^2 + 4 = 0 \rightarrow 2x^2 = -4 \xrightarrow{+2} x^2 = -2$$

- اگر a عددی مثبت باشد، معادله دارای دو جواب خواهد بود:

$$x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a}, \quad x = -\sqrt{a}$$

نمونه، معادله‌ی $2x^2 - 4 = 0$:

$$2x^2 - 4 = 0 \rightarrow 2x^2 = 4 \xrightarrow{+2} x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

حل معادله درجه دوم به کمک ریشه‌گیری

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 = a$ عبارت‌اند از:

$$x = -\sqrt{a} \text{ و } x = \sqrt{a}$$

روش تجزیه کردن:

حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ توسط تجزیه عبارت سمت چپ انجام می‌شود.

می‌دانیم که تجزیه یک عبارت به معنای تبدیل آن به حاصل ضرب حداقل دو عبارت است. از جمله تجزیه‌هایی که در حل معادله درجه دوم استفاده می‌شوند، عبارت‌اند از:

$$ax^2 + bx = x(ax + b)$$

(۲) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

(۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

روش مربع کامل:

برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با این روش مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

- اگر مقدار a برابر ۱ نباشد، تمام جملات را بر a تقسیم کنید تا ضریب x^2 برابر ۱ شود. بنابراین: معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$x^2 + px + q = 0$$

- مقدار $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$ ، یعنی: «مجدور نصف ضریب x » را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + q = \frac{p^2}{4}$$

- سه جمله‌ای سمت چپ اتحاد مربع دوجمله‌ای است:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

از تساوی اخیر، به شرطی که عدد سمت راست منفی نباشد، دو جواب برای معادله بدست می‌آید.

روش کلی حل معادلات درجه دوم:

نکته ۵

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$:

ابتدا مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ به نام «دلتا» را تعیین می‌کنیم. آنگاه:

- اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مختلف** (متمایز) دارد که عبارتند از:

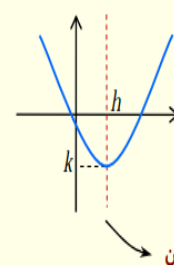
$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله **ریشه‌ی مضاعف** (تکراری) دارد که عبارتند از:

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

- اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله **هیچ جوابی** (حقیقی) ندارد.

نکته ۷



$$a \neq 0$$

$$y = a(x-h)^2 + k$$

هر گاه معادله‌ی سهمی به صورت مرتب:

نوشته شده باشد، مختصات رأس به صورت (h, k) است.

بعلاوه:

خط عمودی گذرا از رأس همواره محور تقارن سهمی است.

در نتیجه:

معادله‌ی محور تقارن در دو حالت استاندارد چنین است:

■ وقتی معادله به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ باشد، معادله‌ی محور تقارن به صورت $x = h$ است.

■ وقتی معادله به صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد، معادله‌ی محور تقارن به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ است.

خصوصیات نمودار:

نمودار معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ در دستگاه مختصات دارای خواص زیر است:

■ در کل نمودار بر حسب علامت a فقط به یکی از دو صورت زیر است:



اگر $a < 0$ باشد



اگر $a > 0$ باشد

به این نمودار یک «سهمی» و به نقطه‌ی S در هر دو حالت رأس سهمی گفته می‌شود.

• برای $a > 0$ رأس سهمی می‌نیم نمودار است؛ یعنی کمترین عرض را دارد.

• برای $a < 0$ رأس سهمی ماکزیم نمودار است؛ یعنی بیشترین عرض را دارد.

■ طول رأس سهمی همیشه از رابطه‌ی:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

بدست می‌آید. عرض آن هم با جایگذاری عدد $-\frac{b}{2a}$ در معادله برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ بدست خواهد آمد.

توجه کنید:

برای رسم نمودار سهمی، کافی است مختصات رأس، یک نقطه در سمت چپ

و یک نقطه هم در سمت راست رأس مشخص کنیم.



رأس سهمی

نکته ۹

علامت عبارت درجه اول:

علامت عبارت $P = ax + b$ طبق مراحل زیر تعیین می گردد:

▪ ریشه ی عبارت را مشخص می کنیم:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

▪ این عبارت در چپ و راست a «یعنی ضریب x » علامت های مختلف دارد:

x	$-\frac{b}{a}$
P	موافق علامت a مخالف علامت a

تعیین علامت

۴



برای تعیین علامت عبارت درجه ی دوم $P = ax^2 + bx + c$ ، ابتدا معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ را تشکیل داده و سپس با

تعیین $\Delta = b^2 - 4ac$ با سه حالت مواجه می شویم:

نکته ۱۰

حالت اول:

اگر $\Delta > 0$ باشد، آنگاه دو ریشه ی مختلف x' و x'' موجود بوده و P با جدول زیر تعیین علامت می شود.
نمودارهای مرتبط نیز که سهمی هستند را می بینید:

x	x'	x''
P	موافق a مخالف a	موافق a

بنابراین در حالت $\Delta > 0$ ، علامت P گاهی مثبت و گاهی منفی است.

نکته ۱۱

حالت دوم:

اگر $\Delta = 0$ باشد، آنگاه معادله دو ریشه‌ی مضاعف $x' = x''$ دارد و علامت P و نمودارهای مربوطه عبارتند از:

x	x'
F	موافق a موافق a

بنابراین در حالت $\Delta = 0$ عبارت P در یک نقطه صفر و در بقیه جاها فقط یک علامت دارد.

نکته ۱۲

حالت سوم:

اگر $\Delta < 0$ باشد، آنگاه ریشه‌ای وجود نداشته، علامت P و نمودارها به صورت زیر هستند:

x	
F	همواره هم علامت a

بنابراین در حالت $\Delta = 0$ عبارت P در یک نقطه صفر و در بقیه جاها فقط یک علامت دارد.

توجه کنید:

برای تعیین علامت عبارت‌هایی که به صورت ضرب یا تقسیم عبارت‌های درجه یک یا دو هستند، تک تک عامل‌ها را

تعیین علامت کرده و علامت‌های بدست آمده را در هم ضرب می‌کنیم. توجه کنید:

عبارت‌های کسری، در ریشه‌های مخرج تعریف نشده‌اند.

نکته ۱۳

در مورد عبارت $P = ax^2 + bx + c$:

- شرط آن که P همواره مثبت باشد آن است که $\Delta < 0$ و $a > 0$. (نمودار واقع در بالای محور طول‌ها)
- شرط آن که P همواره منفی باشد آن است که $\Delta < 0$ و $a < 0$. (نمودار واقع در زیر محور طول‌ها)

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت^۱

۱- اگر $|u| \leq a$ آن‌گاه $-a \leq u \leq a$.

۲- اگر $|u| \geq a$ آن‌گاه $u \geq a$ یا $u \leq -a$.

حل نامعادلات

منظور از حل یک نامعادله:

تعیین تمام مقادیری از x است که به‌ازای آن‌ها، نامعادله به یک نامساوی درست تبدیل گردد!

روش کلی برای حل نامعادلات به صورت زیر است:

نکته ۱۴

برای حل یک نامعادله چنین عمل کنید:

- تمام عبارات را به سمت چپ نامساوی منتقل کنید.
- عبارت حاصل را ساده کرده و سپس تعیین علامت کنید.
- مقادیری که علامت عبارت در جدول با علامت نامعادله یکسان است، جواب نامعادله محسوب می‌شود.

مبحث: تابع

فصل ۵: تابع

مدل‌ساز: نرگس اصلانی



تست: کدام عبارت زیر بیان‌گر یک تابع نیست؟

- ۱ قاعده‌ای که به هر شخص اندازه‌ی قد او را بر حسب سانتی‌متر نسبت می‌دهد.
- ۲ قاعده‌ای که به هر شخص نام اولین کتابی که خوانده است را نسبت دهد.
- ۳ قاعده‌ای که به هر عدد مجذور آن را نسبت دهد.
- ۴ قاعده‌ای که به هر عدد یک مقسوم علیه آن را نسبت دهد.

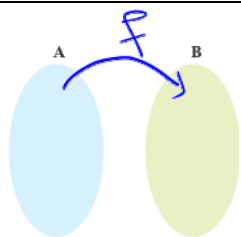
گزینه ۴ ✓

نکته ۱

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. قاعده‌ای که:

به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B را مربوط کند.

یک «تابع» نامیده می‌شود. توابع را معمولاً با حروف کوچک f ، g و ... نام‌گذاری می‌کنیم.



نمودار ون:

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

خواص این نوع نمودار:

- از هر عضو شکل سمت چپ دقیقاً یک فلش خارج می‌شود؛ بنابراین:

نباید هیچ عضو سمت چپ بدون فلش باشد یا از یک عضو سمت چپ ۲ فلش خارج شود

- ممکن است به برخی اعضای سمت راست بیشتر از یک فلش وارد شود و یا:

- به برخی اعضای سمت راست هیچ فلشی وارد نشود.

نکته ۲

اگر در عبارت (a, b) ترتیب قرار گرفتن a و b مهم باشد، به آن «زوج مرتب» گفته می‌شود. بنابراین در کل:

$$(a, b) \neq (b, a)$$

بعلاوه:

دو زوج مرتب وقتی برابرند که مؤلفه‌های نظیر آن‌ها برابر باشند:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

دامنه و ضابطه

۲

نکته ۵

در یک تابع f به صورت زوج‌های مرتب:

به مجموعه‌ی مؤلفه‌های اول: «دامنه» و به مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم آن: «بردار»

گفته می‌شود و آن‌ها را به ترتیب با D_f و R_f نشان می‌دهیم.

نکته ۴

اگر تمام زوج‌های مرتب یک رابطه یا تابع را در یک دستگاه مختصات مشخص کنیم، نمودار آن بدست می‌آید.

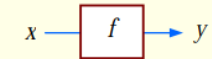
توجه کنید:

یک نمودار هندسی وقتی نمودار یک تابع است که:

هر خط موازی محور y آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

نکته ۶

در واقع تابع f مقدار x را به عنوان ورودی گرفته، روی آن اثر کرده و y را در خروجی داده است:



می‌نویسیم: $f(x) = y$ و به آن «**ضابطه‌ی تابع**» گفته می‌شود که در واقع همان قانون این تابع است. بنابراین:

دو عبارت $y = f(x)$ و $(x, y) \in f$ دارای یک معنی هستند.

برای نمونه:

در تابع $f(x) = -x^2 + 3$ مقادیر $f(-1)$ و $f(f(0))$ را حساب می‌کنیم:

$$f(-1) = -((-1)^2) + 3 = -(1) + 3 = 2$$

$$f(0) = -(0)^2 + 3 = 3 \Rightarrow f(f(0)) = f(3) = -(3^2) + 3 = -9 + 3 = -6$$

نکته ۷

هرگاه فقط معادله‌ای بر حسب x و y داده شود. در این صورت:

هنگامی آن معادله مربوط به یک تابع است که به ازای هر x ، حداکثر یک مقدار برای y بدست آید.

هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

👉 تابع چند ضابطه‌ای:

گاهی یک تابع با بیش از یک ضابطه بیان می‌شود؛ نمونه:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x > 0 \\ x^2 + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

محاسبه‌ی چند مقدار:

$$f(2) = -2 \quad \text{و} \quad f(\underbrace{\sqrt{12-3}}_{>0}) = -2 \quad \text{و} \quad f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

توجه کنید:

وقتی تابعی با چند ضابطه بیان می‌شود، دامنه‌ی آن از اجتماع دامنه‌های مربوط به هر ضابطه بدست می‌آید. برای نمونه، در تابع:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-3x}{x-1} & x > 1 \\ x^2 + 2 & x \leq 0 \end{cases}$$

دامنه عبارت است از: $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.

نکته ۹

تابع «چندجمله‌ای» دارای ضابطه‌ی چندجمله‌ای است.

برای نمونه:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2 \quad \text{و} \quad g(x) = 2x - x^2$$

دو تابع چندجمله‌ای اهمیت ویژه‌ای دارند:

▪ تابع با ضابطه‌ی درجه ۱ به صورت کلی $f(x) = ax + b$ که «تابع خطی» است. مانند:

$$y = -2x + 3$$

▪ تابع درجه ۲ با ضابطه‌ی کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ «تابع سهمی» نیز نامیده می‌شود.

مانند:

$$y = 2x^2 - 4x + 1$$

توابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله‌ای می‌نامیم.

نکته ۸

وقتی نمودار یک تابع در دستگاه مختصات داده شود:

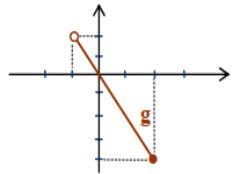
▪ دامنه عبارت است از نقاطی روی محور طول که در بالا یا پایین آن‌ها نمودار موجود باشد. به بیان دیگر:

کافی است نمودار را بر محور طول‌ها تصویر کنید!

▪ برد عبارت است از نقاطی روی محور عرض که در چپ یا راست آن‌ها نمودار موجود باشد. به بیان دیگر:

کافی است نمودار را بر محور عرض‌ها تصویر کنید!

برای نمونه،



$$D_g = (-1, 2], \quad R_g = [-4, 2]$$

دامنه و برد تابع روبرو را هم ببینید:

• طول‌های نقاط از $-\infty$ شروع شده و تا نقطه‌ی ۲ (غیر از خود ۲) ادامه

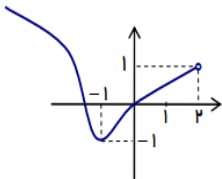
دارند و بنابراین:

$$D = (-\infty, 2)$$

• عرض‌های نقاط نیز کمترین مقدارشان -۱ بوده و تا انتهای محور عرض

ادامه دارند:

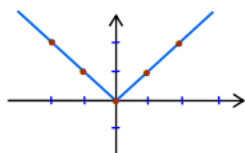
$$R = [-1, +\infty)$$



تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می کند، تابع قدر مطلق نامیده می شود. تابع قدر مطلق را با $f(x) = |x|$ یا $y = |x|$ نمایش می دهند.

نمودار تابع قدر مطلق به صورت زیر است:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۲	۱	۰	۱	۲



توجه کنید:

نمودار این تابع، نیمسازهای نواحی اول و دوم است. یعنی:

نیم خطهای $y = x$ در دامنه $x \geq 0$ و $y = -x$ در دامنه $x \leq 0$.

اگر دامنه یک تابع قدر مطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

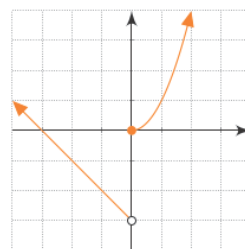
تابع قدر مطلق را به صورت $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ نیز نمایش می دهند.

با توجه به اینکه برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تابع دارای معادله های مختلفی است، این تابع یک تابع چند ضابطه ای (قطعه ای) نامیده می شود.

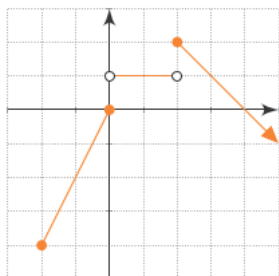
تابع مقابل نیز یک تابع قطعه ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع برای اعداد مثبت همان نمودار سهمی $y = x^2$ است و برای اعداد منفی نمودار تابع با نمودار خط $y = -x - 3$ برابر است. نمودار $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.

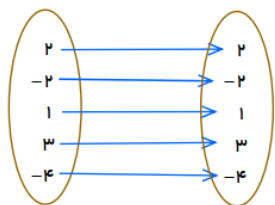


۲ نمودار تابع قطعه ای f داده شده است. ضابطه آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.



اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند.
اگر دامنه تابع همانی را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ هم نمایش داده می‌شود.

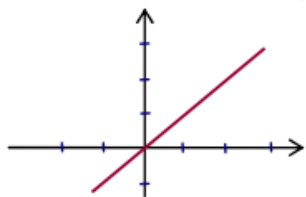
نمونه‌های تابع همانی در حالت‌های مختلف:



$$g = \{(2, 2), (-2, -2), (3, 3), (-4, -4)\}$$

توجه کنید:

در تابع همانی، نمودار با توجه به دامنه، تمام یا جزئی از خط $y = x$ خواهد بود.



توجه کنید:

در نمودار مختصاتی تابع ثابت، اگر دامنه $\mathbb{R}$ داده شود، نمودار آن یک خط افقی خواهد بود. در صورتی که دامنه تمام اعداد نباشد، باز هم نمودار از نقاطی موازی محور طول‌ها تشکیل می‌شود.

نکته ۱۱

در تابع «تابع همانی» مقادیر x و y همواره برابر هستند. پس:

$$f(x) = x$$

نمونه‌ای از یک تابع همانی:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۲	-۱	۰	۱	۲

اگر f تابعی ثابت و g تابع همانی باشد و تساوی $(f(3))^2 + g(3) = 4f(4)$ برقرار باشد، کدام می‌تواند باشد؟

تابع ثابت $f : f(3) = f(4) = f(5)$

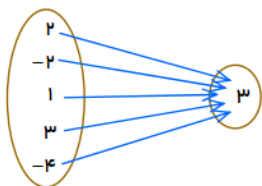
تابع همانی $g : g(3) = 3$

$$(f(3))^2 + g(3) = 4f(4) \Rightarrow (f(5))^2 + 3 = 4f(5) \Rightarrow (f(5))^2 - 4f(5) + 3 = 0$$

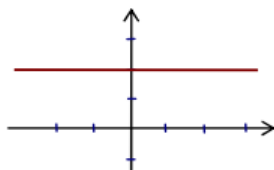
$$\Rightarrow (f(5) - 3)(f(5) - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(5) = 1 \\ f(5) = 3 \end{cases} \quad g(5) + f(5) = \begin{cases} 5 + 1 = 6 \\ 5 + 3 = 8 \end{cases}$$

تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم.

نمونه‌های تابع ثابت در حالت‌های مختلف:



$$g = \{(-2, 3), (3, 3), (-4, 3)\}$$



نکته ۱۰

در «تابع ثابت» مقدار y همیشه یک عدد ثابت (مثلاً k) است:

$$f(x) = k$$

برای نمونه:

تابع y که با جدول مقادیر زیر داده شده، تابعی ثابت است:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۲	۲	۲	۲	۲

نکته ۱۳

انتقال عمودی:

وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + k$ ، طول نقاط ثابت مانده و فقط عرض آن‌ها را به اندازه‌ی k در جهت عمودی انتقال می‌دهیم. به طور دقیق‌تر:

- اگر k **مثبت** باشد، نمودار به اندازه‌ی k به **بالا** منتقل می‌شود.
- اگر k **منفی** باشد، نمودار به اندازه‌ی k به **پایین** منتقل می‌شود.

رسم برخی توابع به کمک انتقال

انتقال افقی:

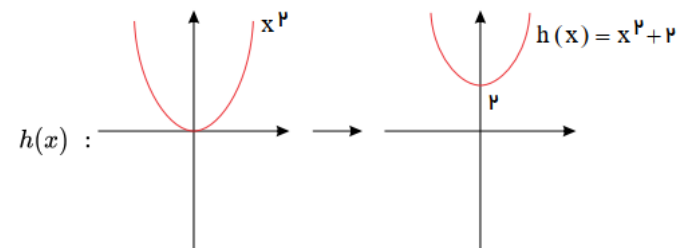
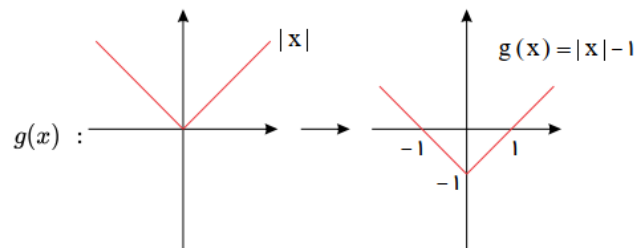
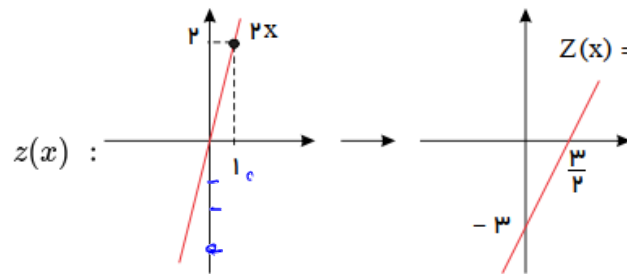
وقتی نمودار تابع $y = f(x)$ را در اختیار داریم، علاوه بر قانون قبلی، چند روش دیگر برای انتقال نمودار وجود دارد که به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

- برای رسم نمودار تابع $y = f(x+a)$ ، نمودار $y = f(x)$ را به اندازه‌ی a و در جهت افقی به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
- برای رسم نمودار تابع $y = f(x-a)$ ، نمودار $y = f(x)$ را به اندازه‌ی a و در جهت افقی به سمت راست منتقل می‌کنیم.

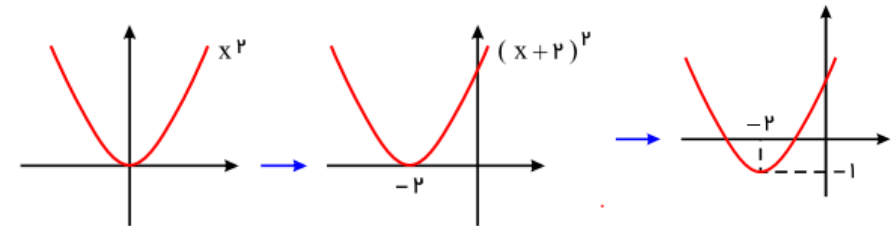
رسم برخی توابع به کمک انتقال

. توابع $z(x) = 2x - 3$ و $h(x) = x^2 + 2$ و $g(x) = |x| - 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

پاسخ: ابتدا توابع $2x$ ، x^2 و $|x|$ را رسم می‌کنیم و سپس نمودار کلی $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه‌ی k واحد در امتداد محور y ها رسم می‌کنیم.



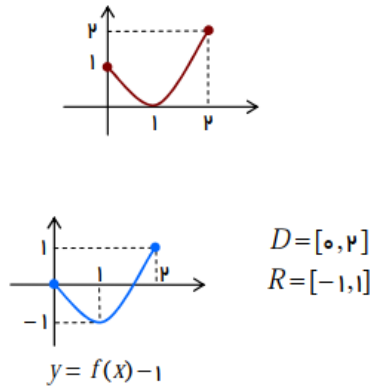
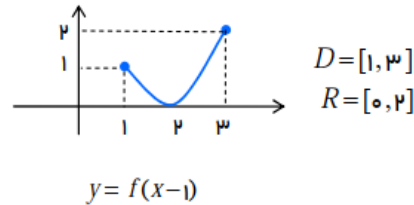
نمودار تابع $f(x) = (x + 2)^2 - 1$



نمونه:

برای نمودار $y = f(x)$ در روبرو:

دو انتقال و دامنه و بردها را ببینید:



برای رسم تابع $-f(x)$ کافیت تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.
برای رسم تابع $f(-x)$ کافیت تابع $f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

مدیر: نرگس اصلانی

فصل ۶: شمارش، بدون شمردن مهمت: ترکیبیات

نکته ۱

فرض کنید کار A به m طریق و کار دیگری چون B به n طریق مختلف قابل انجام باشد.

اصل جمع:

اگر بخواهیم یکی از کارهای A یا B را انجام دهیم، این کار به $m+n$ طریق مختلف قابل انجام است.

اصل ضرب:

اگر بخواهیم کارهای A و B را همزمان انجام دهیم، این کار به $m \times n$ طریق مختلف قابل انجام است.

اصلهای شمارش

مبنای شمارش دو اصل زیر است:

توجه کنید:

اصل‌های شمارش برای بیش از دو کار نیز به‌طریق مشابه برقرار هستند.
برای نمونه:

اگر کار اول به n_1 طریق، کار دوم به n_2 طریق و ... و کار k ام به n_k طریق مختلف قابل انجام باشند،

آنگاه انجام تمام این کارها با هم به $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ طریق مختلف قابل انجام است.

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ ✓

اصل ضرب پیکار می‌رود، زیره

پایه رقم یکان و رقم دهگان و رقم صدگان انتخاب شوند تا عدد سه رقمی تشکیل گردد!

حالات رقم یکان: سه انتخاب ۱، ۳ و ۵ وجود دارد. (۳ روش)

رقم سمت راست: رقم ۰ و رقم پیکار رفته در یکان نمی‌توانند قرار گیرند، چون تکرار ارقام مجاز نیست. (۴ روش)

رقم وسط: غیر از دو رقم پیکار رفته تا این‌جا، بقیه‌ی ارقام مجاز هستند. (۴ روش)

$$\underline{۴} \times \underline{۴} \times \underline{۳} = ۴۸$$

رقم فرد سایر ارقام غیر از ۰ و رقم قرار داده شده در یکان

ساختمانی دارای دو درب و یک مجتمع فروشگاهی دارای پنج درب است. یک شخص به

چند طریق می‌تواند از درب‌های ساختمان اول خارج و از درب‌های فروشگاه داخل آن شود؟

چون قرار است شخص هم از درب ساختمان اول خارج شود و هم وارد فروشگاه شود، باید اصل ضرب را پیکار بگیریم:

$$\underline{۲} \times \underline{۵} = ۱۰$$

یک راهکار بسیار مفید و کاربردی:

نکته ۲

تکنیک متمم:

هرگاه محاسبه‌ی تعداد روش‌ها به روش مستقیم غیر ممکن و یا مشکل باشد، از روش غیر مستقیم **(متمم)** استفاده

می‌کنیم. یعنی:

- تعداد حالات مخالف صورت سؤال را تعیین می‌کنیم.
- عدد بدست آمده در مرحله‌ی قبل را از تعداد کل حالت‌ها کم می‌کنیم.

تعداد اعداد سه رقمی شامل رقم ۷ کدام است؟

روش مستقیم حالت‌های مختلفی و زیادی دارد؛ بنابراین طبق

کل عددهای سه رقمی برابر است با:

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 900 \quad \text{طبق روش غیرمستقیم می‌نویسیم:}$$

تعداد عددهایی که در آن‌ها رقم ۷ یکبار نرفته برابر است با:

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 648$$

$$900 - 648 = 252 \quad \text{جواب:}$$

یک نماد مهم مرتبط با شمارش:

نکته ۳

فاکتوریل:

برای عدد طبیعی n ، «فاکتوریل» آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

به علاوه تعریف می‌کنیم: $0! = 1$.

«اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آنها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.»

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$$

$$1! = 1 \quad \text{قرار داد: } 0! = 1$$

در مورد $n!$ می‌توان نوشت:

$$n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)! = \dots$$

مانند:

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times \underbrace{5 \times \dots \times 2 \times 1}_{5!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5!$$

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با $p(n,r)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

از بین کل اشیاء مورد نظر، می‌خواهیم تعدادی از آنها را با رعایت ترتیب انتخاب نماییم.

توجه کنید: 

تعداد جایگشت‌های اشیاء را می‌توان مستقیماً با استفاده از اصل ضرب محاسبه کرد و استفاده از فرمول $P(n; r)$ به ندرت انجام می‌شود. مثلاً در نمونه‌ی قبل می‌توانستیم نفر اول صف را به ۹ روش، نفر دوم را به ۸ روش، نفر سوم را به ۷ روش و نفر چهارم را به ۶ روش انتخاب کنیم و در نتیجه تعداد کل صف‌ها:

$$\underline{9} \times \underline{8} \times \underline{7} \times \underline{6} = 3024$$

خواهد شد که با جواب بدست آمده به روش استفاده از فرمول مطابقت دارد.

نکته ۸

اگر بخواهیم n شیء مختلف را با m شیء مختلف دیگر یک در میان کنار هم جایگشت دهیم، دو حالت رخ می‌دهد:

▪ اگر $m = n$ باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$2 \times m! \times n!$$

▪ اگر $m = n + 1$ باشد، یعنی m و n دو عدد متوالی باشند، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$m! \times n!$$

نکته ۹

طناب‌پیچ:

اگر بخواهیم n شیء مختلف را کنار هم قرار دهیم به طوری که r تایی بخصوص کنار هم قرار گیرند، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$(n - r + 1)! \times r!$$

توجه کنید:

در روش طناب پیچ که در بالا گفته شد، اگر r شیئی که قرار است کنار هم باشند، یکسان داده شده باشند، در این صورت ضریب $r!$ حذف می‌شود. نمونه‌های بعد را ببینید.

به چند طریق می‌توان ۳ کتاب ریاضی یکسان و ۳ کتاب شیمی مختلف را کنار هم قرار داد به طوری که کتاب‌های ریاضی همگی کنار هم باشند؟

کتاب‌های ریاضی را طناب پیچ کرده و به عنوان یک کتاب در نظر می‌گیریم. این کتاب به همراه ۳ کتاب شیمی، چهار کتاب تشکیل داده و تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر است با:

$$4! = 24$$

توجه کنید:

چون سه کتاب ریاضی یکسان داده شده‌اند، عدد بالا را نباید در $3!$ ضرب کنید.

ترکیب:

اگر در انتخاب تعدادی شیء از میان n شیء، ترتیب انتخاب مهم نباشد، به هر انتخاب یک «**ترکیب**» گوئیم.

بنابراین:

تبدیل (جایگشت) مانند ساختن صف با ترتیب است، ولی ترکیب مانند گروه یا زیرمجموعه است.

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوئیم.

تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

نکته ۱۰

تعداد ترکیب‌های r تایی از میان n شیء را با $C(n; r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم که از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

بعلاوه:

بین تعداد ترکیب‌ها و جایگشت‌های r تایی از میان n شیء رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$P(n; r) = r! \times C(n; r)$$

محاسبات سریع:

روابط زیر در محاسبه‌ی سریع تعداد ترکیب‌ها برای هر عدد طبیعی n برقرار هستند:

■ در حالت کلی برای $1 \leq r \leq n$ داریم:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

برای نمونه، مقادیر $\binom{6}{2}$ و $\binom{6}{4}$ یکسان هستند. همچنین: $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$.

همواره داریم $\binom{n}{0} = 1$ و بنابراین تساوی $\binom{n}{n} = 1$ نیز برقرار است. برای نمونه:

$$\binom{4}{0} = 1 \quad \text{و} \quad \binom{4}{4} = 1$$

همواره داریم $\binom{n}{1} = n$ و بنابراین تساوی $\binom{n}{n-1} = n$ نیز برقرار است. برای نمونه:

$$\binom{7}{1} = 7 \quad \text{و} \quad \binom{7}{6} = 7$$

نکته ۱۱

حالت اول: گاهی تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی مورد نظر است:

❖ تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر است با 2^n .

❖ تعداد کل زیرمجموعه‌هایی که شامل k عضو خاص باشند یا نباشند برابر است با 2^{n-k} .

نکته ۱۲

حالت دوم:

گاهی تعداد زیرمجموعه‌ها با تعداد عضو مشخص از یک مجموعه‌ی n عضوی مورد نظر است:

❖ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$.

❖ تعداد انتخاب‌های r عضو به‌طوری که شامل k عضو خاص باشد، برابر است با $\binom{n-k}{r-k}$.

❖ تعداد انتخاب‌های r عضو به‌طوری که شامل k عضو خاص نباشد، برابر است با $\binom{n-k}{r}$.

مفاهیم مقدماتی مبحث احتمال:

نکته ۱

فضای نمونه‌ای:

مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن در یک پدیده‌ی تصادفی است و آن را با S نشان می‌دهیم.

پیشامد تصادفی:

هر زیرمجموعه‌ی A از فضای نمونه‌ای S .

توجه کنید:

اگر S دارای n عضو باشد، تعداد کل پیشامدها برابر 2^n ، یعنی تعداد زیرمجموعه‌ها است.

بعلاوه:

اگر A یک پیشامد باشد، آنگاه:منظور از «بغ دادن» A این است که نتیجه‌ی آزمایش عضو مجموعه‌ی A باشد.

در جعبه‌ای چهار مهره‌ی آبی و سه مهره‌ی قرمز وجود دارد. اگر دو مهره همزمان و به تصادف از جعبه خارج می‌کنیم. الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21 \quad (\text{تعداد انتخاب‌های دو مهره از بین } 7 = 4 + 3 \text{ مهره})$$

ب) تعداد عضوهای پیشامد آن که مهره‌ها هم‌رنگ نباشند.

$$n(A) = \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 4 \times 3 = 12 \quad (\text{تعداد انتخاب‌های یک مهره آبی و یک مهره قرمز})$$

ج) تعداد عضوهای پیشامد آن که مهره‌ها هم‌رنگ باشند.

$$n(A') = n(S) - n(A) = 21 - 12 = 9 \quad (\text{متمم حالت قبل است.})$$

۲. محاسبات و قوانین

محاسبه‌ی احتمال توسط تعداد اعضای فضای نمونه‌ای و پیشامد:

نکته ۲

محاسبه‌ی احتمال:

احتمال پیشامد A در فضای نمونه‌ای S برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

نکته ۳

پیشامد $\emptyset$ هیچ وقت رخ نمی‌دهد و پیشامد S حتماً رخ می‌دهد:

$$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0 \quad \text{و} \quad P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

در مورد یک پیشامد دلخواه A ، چون $0 \leq n(A) \leq n(S)$ است، داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه گیری شانس)

می دانیم اگر S فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ که به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می شود، عددی است حقیقی که $0 \leq P(A) \leq 1$. همچنین می دانیم $P(A)$ هر چقدر به ۱ نزدیک تر باشد، شانس رخداد A بیشتر و هر چقدر به صفر نزدیک تر باشد، شانس رخداد A کمتر است. در واقع در مسائل احتمال با محاسبه $P(A)$ شانس رخداد پیشامد A را اندازه گیری می کنیم.



نکته ۴

اگر پیشامدهای A و B اشتراک نداشته باشند، آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

در حالت کلی:

برای دو پیشامد دلخواه همواره داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



نکته ۳

پیشامد $\emptyset$ هیچ وقت رخ نمی دهد و پیشامد S حتماً رخ می دهد:

$$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0 \quad \text{و} \quad P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

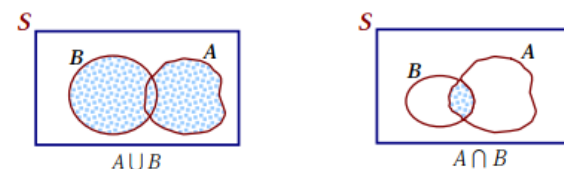
در مورد یک پیشامد دلخواه A ، چون $0 \leq n(A) \leq n(S)$ است، داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

اجتماع و اشتراک:

اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند:

- $A \cup B$ پیشامد آن است که A یا B یا هر دو رخ دهند. (حداقل یکی از A و B رخ دهد).
- $A \cap B$ پیشامد آن است که A و B هر دو رخ دهند.



بویژه:

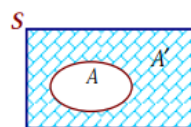
اگر پیشامدهای A و B عضو مشترک نداشته باشند، یعنی: $A \cap B = \emptyset$

در این صورت این دو پیشامد نمی‌توانند همزمان رخ دهند؛ به همین دلیل، به آن‌ها «**ناسازگار**» گفته می‌شود.

پیشامد متمم:

اگر A یک پیشامد باشد، A' پیشامد رخ ندادن A (دقیقاً مخالف A) است؛ به عبارت دیگر:

پیشامد A' هنگامی رخ می‌دهد که A رخ ندهد



نکته ۵

احتمال رخ ندادن پیشامد A برابر است با:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

مثال: از بین شش داوطلب گروه ریاضی و چهار داوطلب گروه تجربی به‌طور تصادفی چهار نفر انتخاب می‌شوند. با چه احتمالی

تعداد داوطلبان ریاضی و تجربی برابر نیستند؟

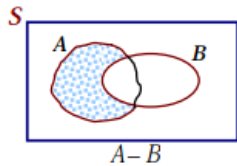
پاسخ ✓

از روش متمم استفاده می‌کنیم. A را پیشامد انتخاب تعداد برابر داوطلبان تجربی و ریاضی بگیریم:

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2} \times \binom{4}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{15 \times 6}{210} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

تفاضل پیشامدها:

$A - B$ پیشامد آن است که A رخ دهد، ولی B رخ ندهد. (یعنی: فقط A رخ دهد!)



نکته ۶

اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند، آنگاه:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ، همواره تساوی زیر برقرار است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، این تساوی به صورت زیر نوشته می شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

علم آمار:

جمع آوری داده‌ها، سازماندهی آن‌ها، تجزیه و تحلیل، نتیجه‌گیری و استنباط نهایی در «علم آمار» انجام می‌شود.

توجه کنید:

طبق تعریف بالا، علم آمار (مطالعه‌ی آماری) چهار مرحله دارد:

۱. جمع آوری اعداد و ارقام (داده‌ها)
۲. سازمان‌دهی و نمایش عددها و ارقام
۳. تحلیل و تفسیر داده‌های آماری
۴. کاربرد تحلیل داده‌ها برای قضاوت و پیش‌بینی آینده

علم آمار

۴

تعریف آمار و علم آمار:

آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. **علم آمار** مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

تست: نتیجه‌ی علم آمار چیست؟

۱ جمع‌آوری داده‌ها و نمایش آن‌ها

۳ تحلیل درست از پدیده‌ها

گزینه ۲ ☒

همان‌طور که در بالا گفته شده،

۲ پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده

۴ سازمان‌دهی اطلاعات به دست آمده

هدف نهایی از علم آمار، شناخت دقیق ویژگی‌های جامعه و تصمیم‌گیری درست برای آینده است.

تعریف جامعه یا جمعیت

مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شود و هریک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می‌نامند.

تعریف جامعه یا جمعیت

مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شود و هریک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می‌نامند.

تعریف اندازه یا حجم جامعه

تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه یا حجم جامعه گویند. به عنوان مثال، دانش‌آموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه باشند و هریک از دانش‌آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

تعریف نمونه

بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گویند.

تعریف اندازه یا حجم نمونه

تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه یا حجم نمونه گویند. به عنوان مثال دانش‌آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش‌آموزان مدرسه هستند و هریک از دانش‌آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می‌شوند.

در نمودار روبه‌رو تعداد کل قطعات تولیدی دو کارخانه «الف» و «ب» مشخص شده است. برای شناسایی تعداد قطعات معیوب، نمونه‌هایی از تعداد کل قطعات تولیدی انتخاب شده که در نمودار روبه‌رو ارائه شده است. با توجه به اعداد و ارقام موجود در نمودار، جدول صفحه بعد را کامل کنید.

نمودار مربوط به تعداد قطعات تولیدی

تعداد کل قطعات تولیدی ■ تعداد نمونه‌های انتخابی ■



اندازه نمونه	نمونه	اندازه جامعه	عضو جامعه	جامعه
۱۰۰۰			قطعات تولیدی	کارخانه الف
	قطعات تولیدی انتخابی			کارخانه ب

مثال: فرض کنید بخواهیم وضعیت دانش‌آموزان پایه‌ی دهم کشور در درس ریاضی را بررسی کنیم. در این صورت:

- مجموعه‌ی تمام دانش‌آموزان سال دهم، جامعه‌ی آماری را تشکیل می‌دهد.
- تعداد دانش‌آموزان کل کشور در پایه‌ی دهم، اندازه یا حجم جامعه خواهد بود.

سرشماری:

گاهی جهت کسب اطلاعات اولیه از جامعه، تمام اعضاء مورد بررسی قرار می‌گیرند. بویژه، هنگامی که:

- جامعه‌ی آماری کوچک باشد یا
- بررسی تمام اعضاء ضروری باشد.

به این عمل سرشماری گویند. برای نمونه:

توجه کنید:

انجام سرشماری در جوامع آماری بزرگ به دلایل مختلفی، از جمله زمان طولانی انجام، هزینه‌ی بالا و همچنین گاهی عدم امکان آن، معمولاً منطقی نبوده و انجام نمی‌شود.

نمونه‌گیری:

اگر به دلایل بالا، سرشماری ممکن نباشد:

«نمونه‌ای مناسب از جامعه انتخاب شده و نتایج مطالعات آماری روی آن به کل جامعه تعمیم داده می‌شود.»

بخشی از جامعه که بیانگر ویژگی‌های کل جامعه است، «نمونه» نام داشته و تعداد اعضای آن، «اندازه‌ی نمونه» نام دارد. توجه کنید:

نمونه هنگامی بیانگر ویژگی‌های کل جامعه است که «تصادفی» باشد!

یعنی:

در نمونه‌گیری، تمام افراد جامعه شانس برابر برای انتخاب شدن داشته باشند.

متغیر تصادفی:

موضوع یا ویژگی مشترکی از اعضای جامعه که مورد بررسی آماری قرار می‌گیرد، «متغیر تصادفی» نام دارد. چند نمونه:

رتبه‌ی کنکور داوطلبان سال ۱۴۰۱ طول قد بازیکنان تیم ملی والیبال بهره‌ی هوشی ایرانیان

متغیرهای تصادفی به دو نوع کلی تقسیم می‌شوند: «کمی» و «کیفی»

نکته ۷

متغیر کمی: داده‌های مربوط به آن را می‌توان به صورت عدد بیان کرد؛ (قابل اندازه‌گیری).

نمونه‌ها:

وزن دانش‌آموزان یک کلاس یا تعداد روزهای آلوده هوا در یک هفته

این متغیر خود دارای دو نوع زیر است:

- **کمی پیوسته:** متغیری است که اگر دو عدد a و b را اختیار کند، هر عدد بین آن‌ها را هم بتواند بگیرد. به عنوان نمونه: مدت زمان پختن یک غذا.
- **کمی گسسته:** متغیری کمی است که پیوسته نباشد. برای نمونه: تعداد بیماران مراجعه کننده به مطب یک پزشک در روز. مقدار این متغیر می‌تواند ۳ یا ۴ باشد، ولی عددهای بین آن‌ها نمی‌تواند.

متغیر کیفی: متغیری که با عدد قابل بیان نباشد، کیفی بوده و خود دارای دو نوع زیر است:

- **کیفی ترتیبی:** در این متغیر، نوعی ترتیب طبیعی (ذاتی) وجود دارد. برای نمونه: وضعیت درسی یک دانش-آموز به صورت «ضعیف»، «متوسط»، «خوب» و «عالی» است که درون خود دارای ترتیب است.
- **کیفی اسمی:** متغیر کیفی که ترتیبی نباشد، اسمی نام دارد. برای نمونه: گروه خونی افراد، متغیر کیفی است، ولی ترتیب ندارد.

بنابراین، تقسیم بندی متغیرها چنین است:

